NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MISTER

NEUBERG

Problème proposé à l'examen de 1844 pour l'admission à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 351-357

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__351_1>

PROBLÈME PROPOSÉ A L'EXAMEN DE 1844 POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

Par MM. MISTER et NEUBERG,
Professeurs de Mathématiques à Nivelles (Belgique).

Ce problème a été résolu par *M. Choquet*, au moyen des coordonnées polaires (voir *Nouvelles Annales*, t. III,

p. 439), mais on peut aussi le traiter très-simplement en employant les coordonnées rectangulaires.

Nous reproduisons l'énoncé : *Un angle constant tourne autour de son sommet placé au foyer d'une courbe du second degré ; aux points où les deux côtés de l'angle rencontrent la courbe, on mène des tangentes à cette courbe : trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes.*

Plaçons l'origine au foyer, les axes étant rectangulaires et l'axe des x perpendiculaire à la directrice ; l'équation de la courbe sera

$$(1) \qquad y^2 + x^2 = (mx + p)^2,$$

ou

$$(2) \qquad y^2 + (1 - m^2)x^2 - 2mpx - p^2 = 0,$$

et celle d'une tangente en un point (x', y')

$$(3) \qquad yy' + (1 - m^2)xx' - mp(x + x') - p^2 = 0.$$

Soient A le point de contact, F le foyer ; joignons FA, et soit

$$y = \delta x$$

l'équation de cette droite. On aura

$$(4) \qquad y' = \delta x'.$$

Les équations (3) et (4) étant résolues par rapport à x' et y' donnent

$$x' = \frac{p(mx + p)}{\delta y + x - m(mx + p)},$$

$$y' = \frac{\delta p(mx + p)}{\delta y + x - m(mx + p)}.$$

Mais le point A étant situé sur la courbe, on a, entre ses coordonnées x' et y', la relation

$$y'^2 + x'^2 = (mx' + p)^2,$$

et en substituant, il vient

$$(1 + \delta^2)(mx + p)^2 = (\delta y + x)^2,$$

ou

$$(5) \qquad \delta^2 - \frac{2xy}{(mx+p)^2 - y^2} \cdot \delta + \frac{(mx+p)^2 - x^2}{(mx+p)^2 - y^2} = 0.$$

Cette équation en δ et les coordonnées x et y d'un point du lieu, étant du second degré, donnera pour δ deux valeurs qui seront les tangentes des angles que font avec l'axe des x les rayons vecteurs FA, FA$'$ joignant le foyer aux points de contact A et A$'$. Soient δ et δ' ces deux valeurs, nous aurons

$$(6) \qquad \delta + \delta' = \frac{2xy}{(mx+p)^2 - y^2},$$

$$(7) \qquad \delta\delta' = \frac{(mx+p)^2 - x^2}{(mx+p)^2 - y^2},$$

et par suite

$$(8) \qquad \delta - \delta' = \frac{2(mx+p)\sqrt{y^2 + x^2 - (mx+p)^2}}{(mx+p)^2 - y^2}.$$

Mais l'angle AFA$'$ est constant et égal à 2α; on a donc

$$(9) \qquad \frac{\delta - \delta'}{1 + \delta\delta'} = \operatorname{tang} 2\alpha.$$

Substituons les valeurs (7) et (8) dans l'égalité (9) et nous aurons pour l'équation de la courbe cherchée

$$\frac{2(mx+p)\sqrt{y^2 + x^2 - (mx+p)^2}}{(mx+p)^2 - y^2 - x^2 + (mx+p)^2} = \operatorname{tang} 2\alpha.$$

Cette équation est du quatrième degré, mais elle se décompose aisément en deux équations du second degré. En chassant le dénominateur, on la met sous la forme

$$y^2 + x^2 - (mx + p)^2 + \frac{2}{\tan 2\alpha}$$
$$\times (mx + p)\sqrt{y^2 + x^2 - (mx + p)^2} = (mx + p)^2.$$

Elle peut être résolue comme une équation du second degré en considérant $\sqrt{y^2 + x^2 - (mx + p)^2}$ comme l'inconnue; on en tire

$$\sqrt{y^2 + x^2 - (mx + p)^2} = -(mx + p)\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}}{\tan 2\alpha}\right):$$

or,

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}}{\tan 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha \pm 1}{\sin 2\alpha};$$

substituons et élevons au carré, il vient

$$y^2 + x^2 - (mx + p)^2 = (mx + p)^2 \left(\frac{\cos 2\alpha \pm 1}{\sin 2\alpha}\right)^2,$$

ou, en séparant les signes,

$$y^2 + x^2 - (mx + p)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = 0,$$

$$y^2 + x^2 - (mx + p)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} = 0.$$

Nous trouvons ainsi deux courbes du second degré; l'une d'elles donne le lieu demandé, l'autre correspond au cas où l'on remplace l'angle 2α par son supplément. Elles ont même foyer et même directrice que la courbe proposée (*).

(*) La théorie des polaires réciproques conduit immédiatement à ce résultat. Il est en effet évident que l'enveloppe de la corde des contacts de deux tangentes menées à un cercle sous un angle donné est un autre cercle

Si la courbe donnée est une ellipse, m est plus petit que l'unité et ces équations peuvent représenter l'une ou l'autre des trois courbes du second degré.

Si la courbe donnée est une hyperbole ou une parabole, on a $m > 1$ ou $m = 1$, et les équations représentent des hyperboles.

L'angle mobile, au lieu d'être constant, pourrait varier d'après une loi déterminée, et les calculs précédents seraient encore applicables. Supposons, par exemple, que les côtés de l'angle restent parallèles à un système de diamètres conjugués d'une autre conique donnée. Dans ce cas, δ et δ' devront satisfaire à une équation de la forme

$$2A\delta\delta' + B(\delta + \delta') + 2C = 0;$$

en y remplaçant $\delta\delta'$ et $\delta + \delta'$ par leurs valeurs fournies par les équations (6) et (7), on aura

$$(A + C)(mx + p)^2 - Ay^2 + Bxy - Cx^2 = 0.$$

On peut traiter de la même manière la question suivante.

Un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet placé en un point d'une courbe du second degré; aux points où les côtés de l'angle rencontrent la courbe on mène des tangentes à cette courbe : trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.

---

concentrique au premier. De la il faut conclure que si d'un foyer d'une conique on mène sous un angle donne deux rayons vecteurs et par leurs extremites des tangentes a la courbe, le lieu du point de rencontre de ces tangentes est une autre conique ayant le meme foyer que la premiere et la meme directrice correspondante a ce foyer Car on sait qu'en prenant pour *courbe auxiliaire* une circonference dont le centre coïncide avec le foyer F d'une conique C, la polaire reciproque de C est une circonference C', et que, inversement, toute circonference *c'* concentrique a C' correspond a une conique *c* ayant F pour foyer et la même directrice que C. G

Soit A le sommet de l'angle : prenons pour axe des x le diamètre AO, et pour axe des y une tangente à la courbe au point A, son équation sera

$$(1) \qquad y^2 - 2px - qx^2 = 0,$$

et celle d'une tangente en un point (x', y') :

$$(2) \qquad yy' - p(x + x') - qxx' = 0.$$

Soit B le point de contact, et soit

$$y = \delta x$$

l'équation de AB, on aura

$$(3) \qquad y' = \delta x',$$

d'où l'on tire, en résolvant les équations (2) et (3),

$$x' = \frac{px}{\delta y - p - qx}, \quad y' = \frac{\delta px}{\delta y - p - qx}.$$

Mais le point (x', y') étant sur la courbe, on a aussi

$$y'^2 - 2px' - qx'^2 = 0;$$

en substituant et ordonnant par rapport à δ, il viendra

$$\delta^2 - \frac{2y}{x}\delta + \frac{2p + qx}{x} = 0.$$

Cette équation donne les deux valeurs de δ, et, par suite,

$$\delta + \delta' = \frac{2y}{x},$$

$$\delta\delta' = \frac{2p + qx}{x},$$

d'où

$$\delta - \delta' = \frac{2}{x}\sqrt{y^2 - 2px - qx^2}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation

$$\frac{(\delta - \delta')\sin\theta}{1 + \delta\delta' + (\delta + \delta')\cos\theta} = \text{tang}\,2\alpha,$$

qui exprime que l'angle 2α est constant; θ étant l'angle des axes, il vient

$$x[(y^2 - 2px - qx^2)4\sin^2\theta - (2p + x + qx + 2y\cos\theta)^2\,\text{tang}^2 2\alpha] = 0.$$

Cette équation est satisfaite par

$$x = 0,$$

ce qui donne l'axe des y, et par

$$(y^2 - 2px - qx^2)4\sin^2\theta - (2p + x + qx + 2y\cos\theta)^2\,\text{tang}^2 2\alpha = 0,$$

qui représente une courbe du second degré.

Si l'angle donné était droit, tang 2α serait infinie et le lieu serait une ligne droite ayant pour équation

$$2p + x + qx + 2y\cos\theta = 0.$$