JOHN GRIFFITHS

Note sur un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 345-349

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__345_1>

NOTE SUR UN CERCLE;

PAR M. JOHN GRIFFITHS,
Jesus College, Oxford.

Représentons par l, m, n les milieux des côtés BC, CA, AB *d'un triangle* ABC; *par* S_a, S_b, S_c *et* S_l, S_m, S_n *les cercles décrits sur ces côtés et sur les médianes* Al, Bm, Cn *comme diamètres; et enfin, par* E *l'ellipse* *qui touche les côtés en leurs milieux l, m, n : démontrer que le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse* E, *passe par les points d'intersection des circonférences suivantes :*

$$1^{\circ}\ S_a, S_l,\quad 2^{\circ}\ S_b, S_m;\quad 3^{\circ}\ S_c, S_n;\quad 4^{\circ}\ S, S',$$

où S, S′ représentent le cercle circonscrit et le cercle conjugué au triangle (voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. II, p. 339).

Si l'on prend le triangle ABC pour triangle de référence, les cercles indiqués ci-dessus seront représentés par les équations :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} S_a = \alpha^2\cos A - \beta\gamma - \gamma\alpha\cos C - \alpha\beta\cos B = 0,\\ S_b = \beta^2\cos B - \beta\gamma\cos C - \gamma\alpha - \alpha\beta\cos A = 0,\\ S_c = \gamma^2\cos C - \beta\gamma\cos B - \gamma\alpha\cos A - \alpha\beta = 0,\end{array}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} S_l = b\beta^2\cos B + c\gamma^2\cos C - a\beta\gamma - (b + c\cos A)\gamma\alpha\\ \qquad\qquad - (b\cos A + C)\alpha\beta = 0,\\ S_m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,\\ S_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0\ (*),\end{array}\right.$$

et, si l'on désigne par S_d le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} E = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - 2bc\beta\gamma - 2ca\gamma\alpha\\ \qquad\qquad - 2ab\alpha\beta = 0,\end{array}\right.$$

(*) En coordonnées *trilinéaires*, l'équation générale de la circonférence est

$$(l\alpha + m6 + n\gamma)(\alpha\sin A + 6\sin B + \gamma\sin C)$$
$$+ k(6\gamma\sin A + \gamma\alpha\sin B + \alpha6\sin C) = 0;$$

(*Traité des sections coniques* de M. G. Salmon; 4e éd., p. 119.)

Les coefficients variables sont l, m, n, k; il suffit de connaître leurs rapports, pour que l'équation soit déterminée. Ces rapports s'obtiennent facilement quand on a les coordonnées de trois points de la courbe. Par exemple on trouve, sans la moindre difficulté, l'équation de la circonféon trouve que

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} S_d = a\alpha^2\cos A + b\beta^2\cos B + c\gamma^2\cos C \\ -2(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0, \end{aligned}\right.$$

d'où on déduit les relations suivantes :

$$S_l = bS_b + cS_c,$$
$$S_m = cS_c + aS_a,$$
$$S_n = aS_a + bS_b,$$
$$S_d = aS_a + bS_b + cS_c,$$

et, par conséquent,

$$aS_a + S_l = S_d = bS_b + S_m = cS_c + S_n.$$

---

rence S_a decrite sur BC comme diamètre, en remarquant que cette courbe passe par les points H′, H″, pieds des perpendiculaires abaissees des sommets B, C sur les côtes opposes.

Dans certains cas, on peut determiner directement l'équation de la circonference consideree, au moyen de cette proposition que, *si d'un point quelconque d'une circonference, on mène des perpendiculaires sur les côtés d'un quadrilatère inscrit, le produit des perpendiculaires abaissées sur deux des côtés opposés est égal au produit des deux autres perpendiculaires.*

Ainsi, en nommant p la perpendiculaire abaissee d'un point de la circonference S_a sur H′H″, on aura $p\alpha = 6\gamma$. Mais l'equation de la droite H′H″ est

$$\alpha\cos A - \gamma\cos C - 6\cos B = 0;$$

et, d'après la formule qui donne la distance d'un point à une droite, la valeur de p est

$$\alpha\cos A - \gamma\cos C - 6\cos B;$$

donc la circonference S_a a pour equation

$$(\alpha\cos A - \gamma\cos C - 6\cos B)\alpha = 6\gamma$$

ou

$$\alpha^2\cos A - 6\gamma - \alpha\gamma\cos C - \alpha 6\cos B = 0.$$

Quant à l'equation de S_d, lieu geometrique du sommet d'un angle droit circonscrit a l'ellipse E qui touche en leurs milieux les trois côtes du triangle ABC, elle peut être deduite de l'equation qui represente, en coordonnees trilineaires, le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit a une conique quelconque (p. 338 de l'ouvrage deja cite). G.

La circonférence S_d passe donc par les six points d'intersection des circonférences S_a, S_l; S_b, S_m; S_c, S_n. Il est évident aussi, d'après l'équation (4), que S_d passe par les deux points communs aux circonférences S, S'. Le théorème est ainsi démontré.

Les axes radicaux des cercles S_a, S_l; S_b, S_m et S_c, S_n, ont pour équations :

$$(5)\qquad -2\alpha\cos A + \beta\cos B + \gamma\cos C = 0,$$

$$(6)\qquad \alpha\cos A - 2\beta\cos B + \gamma\cos C = 0,$$

$$(7)\qquad \alpha\cos A + \beta\cos B - 2\gamma\cos C = 0.$$

Il suit de là que ces lignes passent toutes trois par le point de concours des hauteurs du triangle.

D'ailleurs, on a, d'après les relations ci-dessus,

$$2S_d = S_l + S_m + S_n,$$

d'où l'on déduit que les quatre points d'intersection des deux couples de circonférences S_d, S_l; S_m, S_n sont situés sur la circonférence $S_m + S_n$, et que les intersections de S_d, S_m; S_n, S_l; S_d, S_n; S_l, S_m sont situées sur les circonférences $S_n + S_l$ et $S_l + S_m$ respectivement.

Les cordes communes aux cercles S, S_l; S, S_m; S, S_n sont données par les équations

$$(8)\qquad \beta\cos B + \gamma\cos C = 0,$$

$$(9)\qquad \gamma\cos C + \alpha\cos A = 0,$$

$$(10)\qquad \alpha\cos A + \beta\cos B = 0.$$

Donc, les lignes (5), (8); (6), (9); (7), (10) coupent les côtés BC, CA, AB respectivement, en trois points qui sont situés sur la ligne

$$\alpha\cos A + \beta\cos B + \gamma\cos C = 0,$$

c'est-à-dire sur l'axe radical des cercles S, S'.

Les axes radicaux des cercles S_m, S_n; S_n, S_l; et S_l, S_m ont pour équations :

$$\beta \cos B - \gamma \cos C = 0,$$
$$\gamma \cos C - \alpha \cos A = 0,$$
$$\alpha \cos A - \beta \cos B = 0,$$

qui représentent les hauteurs du triangle de référence.

Ces hauteurs sont, évidemment, les cordes communes des cercles

$$S_b,\ S_c;\quad S_c,\ S_a;\quad S_a,\ S_b.$$

Le cercle S_d, lieu dont il s'agit, est concentrique, comme on le sait, à l'ellipse E. Son centre coïncide donc avec le point de rencontre des médianes du triangle.

La valeur que je trouve pour son rayon est

$$\frac{2}{3} R \sqrt{1 + \cos A \cos B \cos C},$$

où R désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC (*).

(*) En nommant a' le demi-diamètre de l'ellipse E, parallèle à la tangente a, et b' le demi-diamètre conjugué conduit au milieu L de BC, on a

$$a'^2 = \frac{a^2}{12} \quad \text{et} \quad b'^2 = \frac{b^2 + c^2}{18} - \frac{a^2}{36},$$

d'où

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{18} = \frac{2 R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{9}.$$

Il s'ensuit

$$a'^2 + b'^2 = \frac{4 R^2 (1 + \cos A \cos B \cos C)}{9},$$
$$\sqrt{a'^2 + b'^2} = \frac{2 R}{3} \sqrt{1 + \cos A \cos B \cos C},$$

ce qui est la valeur du rayon du cercle S_d. G.