Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 320-330

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__320_1>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 550
(voir tome XIX, page 406);

PAR M. LÉON DYRION.

ÉNONCÉ. — *L'équation d'une ellipse (coordonnées rectangulaires) étant* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *par un point pris sur la développée de l'ellipse on peut mener trois normales, dont deux ne sont pas tangentes à la développée au point considéré; la corde qui joint les points d'intersection* A *et* B *de ces deux normales est normale à l'ellipse ayant pour équation*

$$\left(\frac{c^2x}{ab^2}\right)^2+\left(\frac{c^2y}{ba^2}\right)^2=1.$$

(DESBOVES.)

Soit (x', y') un point de la développée; les pieds des normales à l'ellipse issues de ce point seront sur l'hyperbole

$$(1) \qquad c^2xy + b^2xy' - a^2yx' = 0.$$

Si cette hyperbole est tangente à l'ellipse, deux normales se confondront en une seule. Donc, si j'identifie l'équation (1) avec la suivante

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{r} \lambda(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) \\ +\left(y - mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2}\right)(y - px - q) = 0, \end{array} \right.$$

λ, p, q étant indéterminés, l'équation

$$y = px + q$$

représentera la sécante AB.

En identifiant les équations (1) et (2) on a cinq conditions qui déterminent x', y', λ, p, q. Or les trois premières

$$\lambda a^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda b^2 - mp = 0,$$

$$-\lambda a^2b^2 + q\sqrt{a^2m^2 + b^2} = 0,$$

donnent

$$p = -\frac{b^2}{a^2m},$$

$$q = \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}},$$

et l'équation de la sécante AB devient

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x + \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}},$$

que l'on peut écrire

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x - \frac{-\dfrac{b^2}{a^2m}\dfrac{a^2b^2}{c^2}}{\sqrt{\dfrac{a^2b^4}{c^4} + \dfrac{b^4}{a^4m^2}\dfrac{b^2a^4}{c^4}}},$$

qui est l'équation d'une normale à l'ellipse

$$\left(\frac{c^2x}{ab^2}\right) + \left(\frac{c^2y}{b^2a}\right)^2 = 1.$$

Les deux relations que nous avons négligées exprimaient x' et y' en fonction de m. De sorte que si l'on éliminait m entre ces deux équations on aurait l'équation de la développée.

On peut remarquer que la direction de AB est conjuguée de celle de la tangente, ce qui donne encore une propriété remarquable de cette ligne.

Question 669

(voir 2e série, t. II, p. 422);

PAR MM. GODART ET COURTIN,
Élèves de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

Deux tétraèdres abcd, a'b'c'd' étant donnés, désignons par α_1, α_2, α_3, α_4 *les volumes des tétraèdres obtenus en joignant le point a aux points a', b', c', d';* β_1, β_2, β_3, β_4 *les volumes des tétraèdres obtenus en joignant le point b aux points a', b', c', d'; etc.*

Démontrer que

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} = abcd \times \overline{a'b'c'd'}^3.$$

(FAURE.)

Si on a quatre points dont les coordonnées soient $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$, $(x'''y'''z''')$, $(x^{\text{IV}}y^{\text{IV}}z^{\text{IV}})$, le volume du tétraèdre ayant ces quatre points pour sommet est, à un facteur constant près, donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z', & 1 \\ x'', & y'', & z'', & 1 \\ x''', & y''', & z''', & 1 \\ x^{\text{IV}}, & y^{\text{IV}}, & z^{\text{IV}}, & 1 \end{vmatrix}.$$

Nous ferons dans la suite abstraction de ce facteur constant qui se trouverait dans les deux membres de toutes les égalités, et qu'on pourrait supprimer.

Cela posé, considérons un des déterminants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, α_1 par exemple. Si on appelle $(x'y'z')$, $(x''y''z''), \ldots$, les coordonnées des sommets du tétraèdre $abcd$; $(x'_1 y'_1 z'_1)$, $(x''_1 y''_1 z''_1), \ldots$, celles des sommets du tétraèdre $a'b'c'd'$, on a

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x''_1 & y''_1 & z''_1 & 1 \\ x'''_1 & y'''_1 & z'''_1 & 1 \\ x^{\text{IV}}_1 & y^{\text{IV}}_1 & z^{\text{IV}}_1 & 1 \end{vmatrix},$$

et si on appelle $D'_1, D''_1, D'''_1, D^{\text{IV}}_1$ les déterminants mineurs du déterminant qui exprime le volume du tétraèdre $a'b'c'd'$, quand on ordonne ce déterminant par rapport à x', y', z', 1,

$$\alpha_1 = D'_1 x' + D''_1 y' + D'''_1 z' + D^{\text{IV}}_1.$$

De même α_2 serait de la forme

$$\alpha_2 = D'_2 x' + D''_2 y' + D'''_2 z' + D^{\text{IV}}_2,$$

$D'_2, D''_2, D'''_2, D^{\text{IV}}_2$ étant des déterminants mineurs analogues aux premiers, et ainsi de suite; de sorte que le déterminant proposé peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} D'_1 x' + \ldots + D^{\text{IV}}_1, & D'_2 x' + \ldots + D^{\text{IV}}_2, & D'_3 x' + \ldots, & D'_4 x' + \ldots \\ D'_1 x'' + \ldots + D^{\text{IV}}_1, & D'_2 x'' + \ldots + D^{\text{IV}}_2, & D'_3 x'' + \ldots, & D'_4 x'' + \ldots \\ D'_1 x''' + \ldots + D^{\text{IV}}_1, & D'_2 x''' + \ldots + D^{\text{IV}}_2, & D'_3 x''' + \ldots, & D'_4 x''' + \ldots \\ D'_1 x^{\text{IV}} + \ldots + D^{\text{IV}}_1, & D'_2 x^{\text{IV}} + \ldots + D^{\text{IV}}_2, & D'_3 x^{\text{IV}} + \ldots, & D'_4 x^{\text{IV}} + \ldots \end{vmatrix}.$$

Or ce déterminant est égal, comme on sait, au produit

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \\ x^{\text{IV}} & y^{\text{IV}} & z^{\text{IV}} & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} D'_1 & D''_1 & D'''_1 & D^{\text{IV}}_1 \\ D'_2 & D''_2 & D'''_2 & D^{\text{IV}}_2 \\ D'_3 & D''_3 & D'''_3 & D^{\text{IV}}_3 \\ D'_4 & D''_4 & D'''_4 & D^{\text{IV}}_4 \end{vmatrix}.$$

Le premier est, à un facteur constant près, le volume de *abcd*. Quant au second, c'est le déterminant formé par les seize déterminants mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 & 1 \\ x''_1 & y''_1 & z''_1 & 1 \\ x'''_1 & y'''_1 & z'''_1 & 1 \\ x^{\text{IV}}_1 & y^{\text{IV}}_1 & z^{\text{IV}}_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Donc (*) il est égal au cube de ce déterminant qui représente le volume $a'b'c'd'$. La proposition est donc démontrée.

Note. — M. A. S., élève de M. Painvin, a envoyé une solution de la même question. Il existe un théorème analogue pour deux triangles situés dans le même plan.

Question 684

(voir page 59);

PAR M. LÉON DYRION.

Dans toute parabole, la droite qui joint les milieux des rayons de courbure correspondant aux extrémités d'une corde focale quelconque passe par le foyer et par le pôle de la corde focale. A cette propriété descriptive

(*) BALTZER, traduit par HOÜEL, p. 46.

correspond la relation métrique

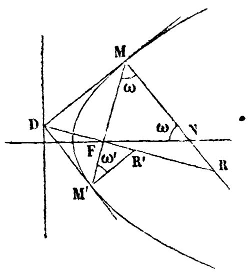
$$\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2}{3}},$$

R *et* R′ *étant les courbures et* $2p$ *le paramètre.* (Pigeon.)

L'expression du rayon de courbure est

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{N}^3}{p^2} = \mathrm{N} \cdot \frac{\mathrm{N}^2}{p^2} = \frac{\mathrm{N}}{\cos^2 \omega},$$

ω étant l'angle FMN = MNF, N la normale. On voit donc que l'on aura le milieu R du rayon de courbure, en élevant



en F une perpendiculaire FR sur la corde. Le point R′ s'obtient par la même construction, et comme la droite FRR′ passe au foyer et au point D, la première partie est démontrée.

Quant à la relation métrique, on a

$$\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{p^{\frac{4}{3}}}{\mathrm{N}^2};$$

on a donc

$$\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{\mathrm{N}^2} + \frac{1}{\mathrm{N}'^2}\right),$$

N′ étant la normale au point M′.

Mais

$$\frac{p}{N} = \cos\omega, \qquad \frac{p}{N'} = \cos\omega' = \sin\omega,$$

donc

$$\frac{1}{N^2} + \frac{1}{N'^2} = \frac{1}{p^2},$$

et

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{R'}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Note du rédacteur. — M. Picquet fait la remarque suivante :

Si l'on considère un rayon lumineux émané du point F et dirigé vers FM, il se réfléchira sur une parallèle à l'axe. Il résultera d'une formule très-connue relative aux caustiques

$$\frac{2}{R} = \cos\omega . \frac{1}{MF}$$

(parce que le rayon réfléchi est infini), c'est-à-dire

$$MF = \frac{R}{2}\cos\omega .$$

Donc la droite qui joint le milieu du rayon de courbure en M au foyer est perpendiculaire à la corde focale. Il en serait de même pour le point M'. Donc la droite qui joint le milieu des rayons de courbure est perpendiculaire à la corde focale, au foyer, et par suite elle passe par le pôle.

MM. Hanon et Willot, élèves de l'École Centrale, ainsi que MM. Mirza-Nizam et Marini, licencié ès sciences, donnent une démonstration géométrique très-simple, fondée sur la construction du rayon de courbure des coniques.

La même question a été traitée par MM. Courtin et

Godart, Lacauchie, Grassat et Tivollier, Nouette et Debatisse, Douradou, Graindorge.

M. Marini donne en outre une solution analytique, et se pose ce problème plus général : *Déterminer la courbe dans laquelle le segment du rayon de courbure intercepté entre le rayon vecteur et une droite partant du pôle et faisant avec lui un angle constant α soit proportionnel au rayon de courbure.* Ce problème conduit à une équation différentielle du deuxième ordre qui se ramène au premier, mais qui paraît ne pouvoir être intégrée complétement que dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}\cdot$ Dans ce cas, et pour quelques valeurs simples du rapport donné, on trouve la parabole, la spirale logarithmique, l'hyperbole équilatère. M. Marini arrive par cette dernière courbe à la propriété suivante : *Dans l'hyperbole équilatère, la perpendiculaire à un diamètre menée par le centre intercepte sur la normale menée à l'extrémité du diamètre, sur la partie prolongée en dehors de la courbe, une longueur égale au rayon de courbure.*

Question 685

(voir page 60);

PAR M. LÉON DYRION.

Une courbe quelconque A *est située dans le plan d'une parabole. On lui mène une tangente mobile qui coupe la parabole en deux points* P et P'. *On projette les centres de courbure relatifs à ces points respectivement sur les rayons focaux qui y aboutissent.*

La droite qui joint ces projections p, p' enveloppe une courbe symétrique de A *par rapport au foyer.*

Examiner le cas particulier où la courbe A *se réduit à un point, et celui où elle s'éloigne à l'infini.* (PIGEON.)

Dans la question précédente, le foyer est la projection sur le rayon vecteur du milieu du rayon de courbure; l'extrémité du rayon se projettera donc suivant un point symétrique de P par rapport au foyer. La projection de l'extrémité de l'autre rayon sera symétrique de P' par rapport au foyer.

On voit donc que la ligne pp' qui joint les projections des centres de courbure est la symétrique de la droite PP' par rapport au foyer. Donc, si PP' est tangente à une courbe A la ligne passant par les projections des centres de courbure sera tangente à une courbe symétrique de A.

Si A est un point, toutes les droites symétriques de PP' passeront par le symétrique de A.

Si A va à l'infini, toutes les droites seront parallèles.

Note. — Solution géométrique, fondée sur la question 684, par MM. H. Picquet, Mirza-Nizam, Hanon et Williot, Tivollier et M. Lhopital, élèves du lycée de Lyon, Nouette et Debatisse, Courtin et Godart. Solution analytique de MM. Tivollier et Grassat.

Questions 686 *et* 687

(voir p. 60).

686. *Si dans une ellipse deux cordes supplémentaires variables passent par les extrémités d'un diamètre donné et que, par un point fixe pris sur l'ellipse, on mène des parallèles à ces cordes, la diagonale libre du parallélogramme qu'elles forment avec elles passe par un point fixe. La connaissance de ce point permet de trouver les points et les tangentes en ces points d'une ellipse donnée par son centre et par trois points.*

(Pigeon.)

687. *Lorsque le sommet d'un angle dont les côtés restent parallèles à eux-mêmes décrit une section co-*

nique, la corde sous-tendue par l'angle enveloppe une seconde conique asymptotique (ou semblable) à la première. (Pigeon.)

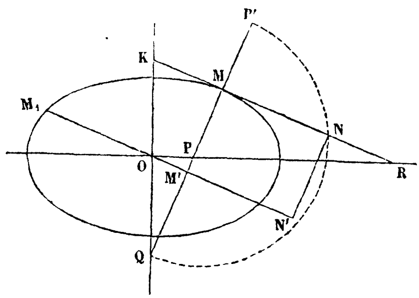
Nous avons reçu un grand nombre de solutions (*) de ces deux questions, et la plupart de leurs auteurs font remarquer que ces théorèmes sont évidents dans le cercle et que leur extension aux sections coniques s'obtient soit par des projections coniques ou cylindriques, soit par la transformation homographique; c'est probablement par l'un de ces moyens que M. Pigeon y est parvenu. Cette remarque dispense d'entrer dans de plus grands détails.

Question 688

(voir p. 61) ;

PAR M. MIRZA-NIZAM.

Par un point quelconque pris sur une ellipse, on mène la normale qui rencontre les axes en P *et* Q. *Sur*



le prolongement de la normale on prend MP' = MP;

(*) Croullebois, élève de l'institution Barbet; Nombel, Alcan, élèves de Sainte-Barbe; Morel, Leclère et Daguenet, Lefort, G. Elie, Graindorge, Bailly et presque tous les élèves nommés à propos des questions précédentes.

sur $P'Q$ *comme diamètre on décrit un cercle qui rencontre au point* N *la tangente conduite par* M. *Par le point* N *on mène une parallèle à la normale, et par le centre* O *une parallèle à la tangente.*

Le rectangle MNM′N′ *ainsi obtenu est constant et équivaut au rectangle construit sur les demi-axes.*

On a dans le cercle

$$\overline{MN}^2 = MP.MQ;$$

les triangles semblables RMP et KMQ donnent

$$MP.MQ = MK.MR = \overline{OM_1}^2,$$

OM_1 étant le diamètre parallèle à la tangente MK; on a donc

$$MN = OM_1.$$

Je joins OM et j'ai

$$MM' = OM.\sin\overline{MOM_1}.$$

On a donc

$$MN.MM' = OM_1.OM.\sin\overline{MOM_1} = ab,$$

a et b étant les demi-axes. Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Ce théorème permet de trouver la limite du point Q ou du point P quand la normale se confond avec l'un ou l'autre axe, et par suite permet de trouver le centre de courbure aux sommets de l'ellipse.

Note. — MM. Bailly, aspirant répétiteur au lycée d'Orléans, Leclère, élève du lycée de Caen (classe de M. Toussaint), font remarquer qu'il existe un théorème analogue pour l'hyperbole. Autres solutions de MM. Dyrion, Lacauchie, élèves du lycée de Strasbourg; Alexandre Barrère, Tivollier et Grassat, Michel Lhopital, du lycée de Lyon; A. du Mesnil, de l'école de Sorrèze (classe de M. Dumont); Smith junior, du lycée Louis-le-Grand; Leparquois, du lycée de Caen; Massing, Douradou, Picquet, Courtin et Godart, de Sainte-Barbe; Puthoste, du Prytanée impérial; Morel, Lhéritier, du lycée de Douai; A. L. et E. L., de l'École Sainte-Geneviève.