

HAAG

**Solution géométrique de la question
donnée en composition au concours
d'admission à l'École normale (1863)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 3
(1864), p. 316-320

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__316_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

De la question donnée en composition au concours d'admission
à l'Ecole Normale (1863);

PAR M. HAAG.

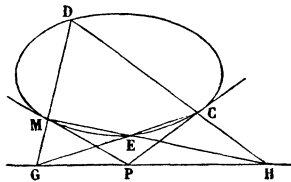
On considère les hyperboles équilatères tangentes à une droite fixe donnée AB en un point C et passant par un point D. D'un point P pris sur AB on mène des tangentes à chacune de ces hyperboles et on demande le lieu des points de contact.

Déterminer la nature du lieu d'après la position du point D.

THÉOREME PRÉLIMINAIRE. — *Si une conique variable passe par deux points fixes D, E et touche une droite fixe PC en un point C, le lieu des points de contact des tangentes à cette conique menées par un point P de la droite PC est une conique.*

En effet, soit M un point du lieu : considérons le qua-

FIG. 1.

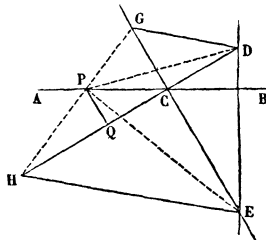


drilatère MDCE ; ce quadrilatère étant inscrit dans une conique à laquelle CP, MP sont tangentes, d'après un

théorème connu, le point P sera situé sur la droite qui joint les points d'intersection G, H des côtés opposés, et l'on pourra considérer le point M comme obtenu en menant par P une sécante arbitraire GH , joignant DG, EH et prenant le point d'intersection de ces deux dernières droites. Or les droites DG, EH décrivent évidemment des divisions homographiques, donc le point M décrit une conique passant aux points D, E . De plus, si la sécante GH coïncide avec PC , on aura le point C , qui est un troisième point du lieu ; enfin, si la sécante se rapproche de la position PD , le point M tend vers le point D , et comme à la limite la sécante DM et la droite PD coïncident, on en conclut que PD est au point D la tangente à la conique trouvée. Pour une raison analogue, PE sera la tangente au point E de cette conique.

Revenons à la question proposée. On sait que dans l'hyperbole équilatère les cordes perpendiculaires à une tangente sont vues du point de contact sous un angle droit. Donc si nous élevons au point C la perpendiculaire à CD

FIG. 2.



et que nous prenions son intersection avec la perpendiculaire à AB menée par D , le point E ainsi obtenu sera commun à toutes les hyperboles équilatères considérées. Donc, d'après le théorème précédent, le lieu demandé est une conique passant par les points C, D, E et ayant en D, E les droites PD, PE pour tangentes.

Cherchons à déterminer d'après la position du point D la nature de la conique trouvée. Cette discussion se fera aisément en cherchant les points de la courbe situés à l'infini.

Soit GH une position de la sécante mobile pour laquelle DG, EH sont parallèles. On aura alors

$$CG \cdot CH = CD \cdot CE,$$

c'est-à-dire que les triangles CDE, CGH seront équivalents. GH sera donc une tangente menée du point P à l'hyperbole équilatère asymptote à DH, EG et touchant DE; et le nombre des points à l'infini sur la conique que nous étudions dépendra de la position du point P par rapport à cette hyperbole.

Du point P abaissons PQ perpendiculaire sur DH, et désignons par θ l'angle PCQ.

1° Si $PQ \cdot CQ$, c'est-à-dire $\overline{PC}^2 \sin \theta \cos \theta$, est plus petit que $\frac{CD \cdot CE}{4}$ ou $\frac{CD^2}{4 \tan^2 \theta}$, le point P est extérieur à l'hyperbole; on a deux positions de GH qui donnent deux points à l'infini, la courbe est donc une hyperbole.

Dans ce cas on a

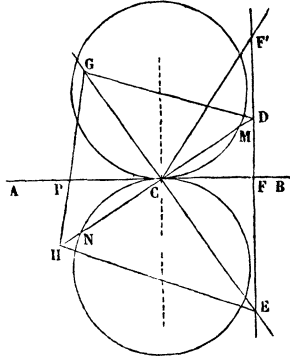
$$CD^2 > 4 \overline{PC}^2 \sin^2 \theta.$$

Décrivons deux cercles avec le rayon PC et tangents à AB au point C de part et d'autre de cette droite. Ces cercles intercepteront sur DH des cordes CM, CN égales à $2 PC \sin \theta$. Comme CD est plus grand en valeur absolue que $2 PC \sin \theta$, le point D sera en dehors de ces cercles.

2° Je suppose que $\overline{PC}^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{CD^2}{4 \tan^2 \theta}$: le point P est alors sur l'hyperbole équilatère. La conique a un point à l'infini, elle est du genre parabole, le point D est sur l'un des deux cercles.

3° Je suppose enfin $PC^2 \sin \theta \cos \theta > \frac{CD^2}{4 \tan \theta}$: le point P est dans ce cas intérieur à l'hyperbole équilatère, il n'y a

FIG. 3.



plus de points à l'infini sur la conique étudiée, qui est alors une ellipse, et le point D est intérieur à l'un des deux cercles.

Pour achever cette discussion, remarquons :

Que la conique est toujours réelle, puisqu'elle passe par trois points réels et qu'elle a des tangentes réelles en deux de ces points ;

Qu'elle ne peut jamais être un cercle, puisque le cercle circonscrit au triangle CDE a en D et en E des tangentes horizontales.

Pour qu'elle se réduise à un système de deux droites, il faut évidemment :

Ou bien que le lieu se compose des deux tangentes PD, PE, et alors le point P doit être en C ;

Ou bien que ces deux tangentes soient dans le prolongement l'une de l'autre, et alors le point P doit être à l'intersection de DE et de AB en F.

Dans le premier cas, on a les droites rectangulaires

CD, CE, qui font partie de la série des hyperboles équilatères considérées.

Dans le second cas, on a la droite DE et une seconde droite CF' conjuguée de CF par rapport à l'angle DCE. On s'explique facilement l'introduction de cette droite qui, passant au point C et au point F' conjugué de F par rapport à DE, est la polaire du point F par rapport à toutes les hyperboles équilatères que l'on considère.

Quant à la droite DE, elle provient du système des droites rectangulaires DE, AB qui peut être considéré comme une hyperbole équilatère remplissant les conditions du problème.