Haag

Solution géométrique de la question donnée en composition au concours d'admission à l'École normale (1862)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 313-315

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__313_2>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

De la question donnée en composition au concours d'admission à l'École Normale (1862);

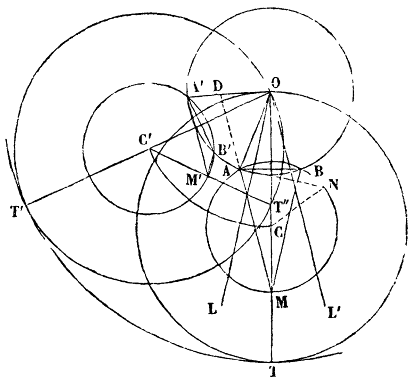
PAR M. HAAG,
Élève de l'École Polytechnique.

On donne un cercle dans lequel on a inscrit une corde AB *de longueur donnée : par les extrémités* A *et* B

(*) Innovation due à l'initiative intelligente de M. le Ministre Duruy. Nous regrettons que les classes de Mathématiques spéciales, si dignes d'intérêt, n'aient pas été admises à concourir. Il est vrai que leur nombre est trop peu considérable dans chaque Académie pour y donner lieu à un concours; mais en réunissant toutes celles des départements, on établirait entre elles une utile émulation P.

de cette corde on mène respectivement des parallèles à deux droites données. On demande le lieu décrit par leur point d'intersection (*).

Soient OL, OL′ les deux directions données. Je consi-



dère la corde mobile dans deux positions successives : en AB où elle est perpendiculaire à la bissectrice OT de l'angle LOL′, et dans une autre position quelconque A′B′. J'appelle M, M′ les points du lieu correspondants, obtenus en menant par A et A′ des parallèles à OL′, par B et B′ des parallèles à OL. Les angles AMB, A′M′B′ étant égaux ainsi que les cordes AB, A′B′, le cercle C′ des points A′B′M′ est égal au cercle C des points ABM, et les points C, C′ sont situés sur des perpendiculaires OC, OC′ à AB, A′B′, à des distances égales du point O. Donc si des points C, C′ comme centres, avec les longueurs CO, C′O

(*) La composition comprenait en outre la question suivante : *Déterminer la limite du rapport* $\frac{x - \sin x}{x^3}$ *lorsque* x *tend vers zéro, et chercher quelle valeur on doit attribuer à* A, B, C *pour que l'expression*

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x} - C$$

s'annule avec x.

comme rayons, on décrit deux cercles, ces cercles étant égaux, on pourra supposer que le premier, CO, vienne coïncider avec le second, C′O, en roulant dans la circonférence OT de rayon double. Je veux démontrer que dans ce mouvement le point M, considéré comme appartenant au plan du cercle mobile, vient coïncider avec le point M′. Pour cela, M′T″ étant égal à MT, il suffira de faire voir que les arcs T′T, T′T″ sont égaux, ou, ce qui revient au même, que l'angle TOT′ est moitié de l'angle T′C′T″. Je prolonge la droite MA en D où elle rencontre OA′, et je prends sur le cercle CM l'arc BN égal à l'arc B′M′. Si de l'angle OAM, extérieur au triangle OAD, on retranche l'angle NAO égal à l'angle M′A′O et par suite à l'angle ADO, il reste l'angle MAN qui sera égal à l'angle AOA′ ou à son égal TOT′. Donc l'angle T′C′T″, égal à l'angle TCN et par conséquent double de l'angle MAN, est aussi double de l'angle TOT′ comme je voulais le démontrer. On peut donc considérer le lieu comme décrit par le point M appartenant au plan du cercle CO qui roule dans le cercle OT, de rayon double : le lieu est donc une ellipse dont le point O est le centre. Les axes de cette ellipse sont OM et une perpendiculaire à OM au point O, c'est-à-dire les bissectrices de l'angle LOL′.

Nous avons supposé qu'on menait par A la parallèle à OL′ et par B la parallèle à OL : en changeant le rôle des points A et B, on obtient une seconde ellipse concentrique à la première. Le grand axe de cette ellipse coïncide en direction avec le petit axe de la première, et réciproquement. On voit aussi que l'excès du grand axe sur le petit axe est le même pour les deux ellipses. Remarquons enfin que l'on a comme cas particuliers les deux bissectrices de l'angle LOL′ quand cet angle est supplémentaire de l'angle AOB, et le cercle O lui-même quand l'angle AOB est nul.