NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MOUTARD

Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 306-309

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__306_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE SUR LA TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES;

Par M. MOUTARD.

La transformation d'une surface algébrique par rayons vecteurs réciproques fournit en général une transformée d'un degré double; il n'y a d'exception à cette règle que lorsque la surface proposée contient le *cercle de l'infini* ou le pôle de transformation.

Désignons :

1° Par m le degré d'une surface;

2° Par p le degré de multiplicité du pôle, c'est-à-dire le nombre des points d'intersection de la surface avec une transversale quelconque issue de ce pôle qui sont confondus en ce point ($p = 0$, pour un pôle extérieur);

3° Par q le degré de multiplicité du cercle de l'infini, c'est-à-dire le nombre des nappes de la surface qui le contiennent;

4° Enfin, par m', p', q', les nombres analogues aux précédents, relatifs à la surface transformée par rayons vecteurs réciproques.

Ces six nombres sont liés entre eux par les trois relations :

$$m' = 2m - p - 2q,$$
$$p' = m - 2q,$$
$$q' = m - p - q,$$

ou leurs équivalentes

$$m = 2m' - p' - 2q',$$
$$p = m' - 2q',$$
$$q = m' - p' - q'.$$

Lorsque $p + 2q = m$, la transformation n'altère ni le degré de la surface, ni le degré de multiplicité du pôle, ni le degré de multiplicité du cercle de l'infini.

Certaines de ces surfaces jouissent en outre de la propriété de se transformer exactement en elles-mêmes, pour un choix convenable du pôle et du paramètre de transformation. Je propose de leur donner le nom d'*anallagmatiques* (ἀ privatif, ἀλλάττω, je change), et j'appellerai *pôle principal* (*) tout pôle pour lequel cette condition est réalisée, et *sphère principale* une sphère ayant pour centre un pôle principal, et pour carré de son rayon le paramètre de transformation correspondant.

Toute surface anallagmatique peut être définie comme le lieu des intersections successives d'une sphère assu-

(*) *Voir* dans l'*Institut* l'extrait du procès-verbal de la séance de la Société Philomathique du 15 décembre 1860.

jettie à couper orthogonalement la sphère principale, et dont le centre décrit une surface directrice fixe. Lorsque la surface directrice admet des génératrices rectilignes, la proposée admet des génératrices circulaires; lorsque la directrice est développable, l'un des systèmes de lignes de courbure de la proposée consiste en circonférences de cercle.

Les surfaces du troisième ordre, qui contiennent le cercle de l'infini, et les surfaces du quatrième ordre, qui contiennent ce cercle comme ligne double, sont en général anallagmatiques par rapport à cinq pôles différents, parmi lesquels trois au moins sont réels. Les cinq sphères principales se coupent deux à deux orthogonalement; de là dérive pour les cinq pôles principaux une relation de positions remarquable: la droite qui joint deux quelconques d'entre eux est nécessairement perpendiculaire au plan des trois autres, ou, ce qui revient au même, chacun des tétraèdres qui a pour sommets quatre des pôles principaux est tel, que ses hauteurs concourent en un même point, et ce point de concours est lui-même le cinquième pôle principal. Si on prend pour pôle de transformation le point de concours des hauteurs de l'une quelconque des faces de ces tétraèdres, avec un paramètre de transformation convenable, la transformée est symétrique de la proposée par rapport à la face du tétraèdre. Nommant un pareil point *pôle secondaire,* on voit qu'il existe en général dix pôles secondaires pour les anallagmatiques du troisième et du quatrième ordre. Dans le cas du troisième ordre, les cinq pôles principaux et les dix pôles secondaires sont situés sur la surface.

Les sphères doublement tangentes à une anallagmatique du troisième ou du quatrième ordre la coupent suivant deux cercles. Toutes ces sphères forment cinq systèmes différents dont les centres sont situés sur les cinq surfaces directrices correspondantes aux cinq pôles principaux; ces directrices sont des surfaces homofocales du second degré, dont le centre commun jouit de propriétés remarquables. Pour le troisième degré, ce centre est rejeté à l'infini.

Tout pôle principal d'une anallagmatique du quatrième ordre est le sommet d'un cône du second degré dont chaque génératrice est doublement tangente à la surface, et dont la courbe de contact est située sur une sphère concentrique aux surfaces directrices. On conclut aisément de là que par un point de la surface on peut mener en général dix sections circulaires, ou, ce qui revient au même, que les plans doublement tangents à la surface se répartissent suivant les plans tangents à cinq cônes du second degré.

Les courbes d'intersection de la surface et des sphères principales renferment divers points remarquables, parmi lesquels les ombilics; mais je me borne ici à signaler leur existence, ainsi que celle des lignes d'intersection des sphères principales et des surfaces directrices correspondantes, dont les propriétés rappellent les lignes focales des surfaces du second degré.

Je ferai remarquer, en terminant, qu'à l'aide d'une simple transformation linéaire, il est aisé de déduire des propriétés des anallagmatiques du troisième et du quatrième ordre un grand nombre de propriétés de la surface générale du troisième degré et des surfaces du quatrième degré dont deux nappes se croisent suivant une même conique.