Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 253-267

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__253_1>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 561

(voir tome XX, page 56);

PAR M. CHARLES BRISSE (*),
Élève de l'Ecole Polytechnique.

Lorsqu'une conique est circonscrite à un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale à seize fois le carré de la tangente menée de son centre au cercle des neuf points, multiplié par le produit des distances de ce centre aux côtés du triangle et divisé par le produit de ses distances aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle. (FAURE.)

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les trois côtés du triangle donné que je prends pour triangle de référence ; une conique circonscrite à ce triangle a pour équation

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0.$$

Si l'on pose, conformément à la notation du Mémoire de

(*) Ci-devant *Abraham Schnée.*

la page 289 du tome II (2e série),

$$\nabla = \begin{vmatrix} a & o & n & m \\ b & n & o & l \\ c & m & l & o \\ o & a & b & c \end{vmatrix},$$

où a, b, c sont les longueurs des trois côtés du triangle de référence,

$$\Delta = \begin{vmatrix} o & n & m \\ n & o & l \\ m & l & o \end{vmatrix} = 2\,lmn,$$

les distances du centre de la conique aux côtés du triangle seront données par les formules (*voir* Mémoire cité)

$$\alpha' = \frac{S}{\nabla}\frac{d\nabla}{da},$$

$$\beta' = \frac{S d\nabla}{\nabla db},$$

$$\gamma' = \frac{S}{\nabla}\frac{d\nabla}{dc},$$

où S est la surface du triangle de référence.

La somme des carrés des demi-axes principaux est donnée (*voir* même Mémoire) par la formule

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = - a^2 b^2 c^2 \frac{2\Delta E}{\nabla^2},$$

où

$$E = -2(l\cos A + m\cos B + n\cos C),$$

A, B, C étant les angles du triangle. En substituant, cette expression devient

$$8\,lmna^2 b^2 c^2 \frac{l\cos A + m\cos B + n\cos C}{\nabla^2}.$$

Les distances du centre aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle sont, changées de signe,

$$\frac{a\alpha' - b\beta' - c\gamma'}{a} = \frac{2S}{a\nabla}\left(a\frac{d\nabla}{da} - \nabla\right),$$

$$\frac{-a\alpha' + b\beta' - c\gamma'}{b} = \frac{2S}{b\nabla}\left(b\frac{d\nabla}{db} - \nabla\right),$$

$$\frac{-a\alpha' - b\beta' + c\gamma'}{c} = \frac{2S}{c\nabla}\left(c\frac{d\nabla}{dc} - \nabla\right).$$

Si l'on désigne par ϖ le carré de la tangente menée du centre au cercle des neuf points, on a (*voir* Mémoire cité)

$$\varpi = 2\frac{\varphi(\alpha', \beta', \gamma')}{E_1},$$

où $\varphi = 0$ est l'équation du cercle des neuf points que voici d'ailleurs :

$$\alpha(a\alpha - b\beta - c\gamma)\cos A + \beta(-a\alpha + b\beta - c\gamma)\cos B$$
$$+ \gamma(-a\alpha - b\beta + c\gamma)\cos C = \varphi = 0,$$

et où

$$E_1 = 2(a\cos A + b\cos B + c\cos C).$$

On sait d'ailleurs que

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{8S^2}{abc};$$

donc

$$E_1 = \frac{16S^2}{abc},$$

et par suite

$$\varpi = \frac{abc}{8S^2}\frac{2S^2}{\nabla^2}\left[\frac{d\nabla}{da}\cos A\left(a\frac{d\nabla}{da} - \nabla\right) + \frac{d\nabla}{db}\cos B\left(b\frac{d\nabla}{db} - \nabla\right)\right.$$
$$\left. + \frac{d\nabla}{dc}\cos C\left(c\frac{d\nabla}{dc} - \nabla\right)\right].$$

Or, on a

$$\nabla = -a^2 l^2 - b^2 m^2 - c^2 n^2 + 2\,bcmn + 2\,canl + 2\,ablm,$$

$$\frac{d\nabla}{da} = 2\,l(-la + mb + nc),$$

$$\frac{d\nabla}{db} = 2\,m(la - mb + nc),$$

$$\frac{d\nabla}{dc} = 2\,n(la + mb - nc),$$

$$\nabla - a\frac{d\nabla}{da} = (la - mb + nc)(la + mb - nc),$$

$$\nabla - b\frac{d\nabla}{db} = (la + mb - nc)(-la + mb + nc),$$

$$\nabla - c\frac{d\nabla}{dc} = (-la + mb + nc)(la - mb + nc),$$

ce qui réduit la valeur de ϖ à

$$\varpi = -\frac{abc}{4\nabla^2}\,2(l\cos A + m\cos B + n\cos C)$$
$$\times(-la + mb + nc)(la - mb + nc)(la + mb - nc)$$

et donne

$$16\varpi = -\frac{8abc}{\nabla^2}(l\cos A + m\cos B + n\cos C)$$
$$\times(-la + mb + nc)(la - mb + nc)(la + mb - nc)$$

Il s'agit de démontrer que l'on a

$$8\,lmna^2b^2c^2\,\frac{l\cos A + m\cos B + n\cos C}{\nabla^2}$$
$$= \frac{8\,abc}{\nabla^2}(l\cos A + m\cos B + n\cos C)\,\frac{S^3}{\nabla^2}\,8\,lmn\,\frac{abc\Delta^3}{8S^3},$$

ce qui est une identité.

Question 562

(voir tome XX, page 56);

PAR M. CHARLES BRISSE.

Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale au double du carré de la tangente menée de son centre au cercle qui a les sommets du triangle donné pour points conjugués. (FAURE.)

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les trois côtés du triangle donné que je prends pour triangle de référence; une conique inscrite à ce triangle a pour équation (*voir* Salmon, *Conic Sections*, 3e édit., p. 101)

$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 - 2mn\,\beta\gamma - 2nl\,\gamma\alpha - 2lm\,\alpha\beta = 0.$$

Si l'on pose, conformément à la notation du Mémoire de la page 289 du tome II (2e série),

$$\nabla = l^2m^2n^2 \begin{vmatrix} \dfrac{a}{l} & 1 & -1 & -1 \\ \dfrac{b}{m} & -1 & 1 & -1 \\ \dfrac{c}{n} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \dfrac{a}{l} & \dfrac{b}{m} & \dfrac{c}{n} \end{vmatrix},$$

où a, b, c sont les longueurs des trois côtés du triangle de référence,

$$\Delta = l^2m^2n^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4l^2m^2n^2,$$

les distances du centre de la conique aux côtés du triangle seront données par les formules (*voir* Mémoire cité)

$$\alpha' = \frac{S}{\Delta}\frac{d\nabla}{da},$$

$$\beta' = \frac{S}{\Delta}\frac{d\nabla}{db},$$

$$\gamma' = \frac{S}{\nabla}\frac{d\nabla}{dc},$$

où S est la surface du triangle de référence.

La somme des carrés des demi-axes principaux est donnée (*voir* même Mémoire) par la formule

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = -a^2 b^2 c^2 \frac{2\Delta E}{\nabla^2},$$

où

$$E = l^2 + m^2 + n^2 + 2\,mn\cos A + 2\,nl\cos B + 2\,lm\cos C,$$

A, B, C étant les angles du triangle de référence. En substituant, cette expression devient

$$8\,l^2m^2n^2a^2b^2c^2\,\frac{l^2 + m^2 + n^2 + 2\,mn\cos A + 2\,nl\cos B + 2\,lm\cos C}{\nabla^2}.$$

Si l'on désigne par ϖ le carré de la tangente menée du centre au cercle conjugué au triangle de référence, on a (*voir* Mémoire cité)

$$\varpi = 2\,\frac{\varphi(\alpha', \beta', \gamma')}{E_1},$$

où $\varphi = 0$ est l'équation du cercle conjugué que voici d'ailleurs :

$$\alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C = 0 = \varphi,$$

et où

$$E_1 = \frac{32 S^3}{a^2 b^2 c^2}.$$

Donc

$$\varpi = \frac{a^2 b^2 c^2 S^2}{16 S^2} \frac{S^2}{\nabla^2} \left[\left(\frac{d\nabla}{da}\right)^2 \sin 2A + \left(\frac{d\nabla}{db}\right)^2 \sin 2B + \left(\frac{d\nabla}{dc}\right)^2 \sin 2C \right].$$

Or, on a

$$\nabla = 4\, lmn(amc + lbc + abn),$$

$$\frac{d\nabla}{da} = 4\, lmn(mc + bn),$$

$$\frac{d\nabla}{db} = 4\, lmn(lc + an),$$

$$\frac{d\nabla}{dc} = 4\, lmn(am + lb),$$

ce qui réduit la valeur de ϖ à

$$\varpi = \frac{a^2 b^2 c^2 l^2 m^2 n^2}{S \nabla^2} [(mc + nb)^2 \sin 2A + (lc + na)^2 \sin 2B + (ma + lb)^2 \sin 2C].$$

Si l'on développe la parenthèse, on obtient

$$l^2(c^2 \sin 2B + b^2 \sin 2C) + m^2(c^2 \sin 2A + a^2 \sin 2C) + n^2(b^2 \sin 2A + a^2 \sin 2B) + 8S(mn \cos A + nl \cos B + lm \cos C),$$

on sait d'ailleurs que

$$c^2 \sin 2B + b^2 \sin 2C = c^2 \sin 2A + a^2 \sin 2C = b^2 \sin 2A + a^2 \sin 2B = 4S,$$

ce qui donne définitivement

$$2\varpi = 8 l^2 m^2 n^2 a^2 b^2 c^2 \times \frac{l^2 + m^2 + n^2 + 2mn \cos A + 2nl \cos B + 2lm \cos C}{\nabla^2},$$

et prouve le théorème.

Question 692
(voir p. 139);

PAR M. CH. DE SAINT-PRIX.

Soit une série de paires de quantités a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; ..., *les* a *étant plus grandes que les* b, *dont la loi de la formation est la suivante :*

$$a_x = a_{x-1} + b_{x-1}, \quad b_x = a_{x-1};$$

trouver la limite du rapport $\frac{a_x}{b_x}$ *lorsque* x *devient infini.*

(STREBOR.)

On a, par la loi de formation,

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_{x-1} + b_{x-1}}{a_{x-1}} = 1 + \frac{b_{x-1}}{a_{x-1}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$$

La limite de cette fraction continue est la racine positive de l'équation

$$y = 1 + \frac{1}{y} \quad \text{ou} \quad y^2 - y - 1 = 0.$$

On aura donc

$$\lim \frac{a_x}{b_x} = y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Louis Chancel, élève de Sainte-Barbe (Lyon); de Marsilly; Ch. Pierre, élève du lycée de Caen; de Virieu; prince Georges Gagarinn, élève de l'École Polytechnique de Zurich.

Question 667
(voir 2e série, t. II, p. 372);

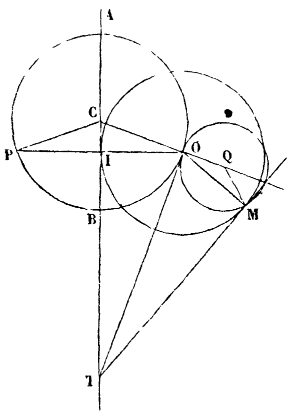
PAR M. DE MARSILLY.

THÉORÈME A DÉMONTRER. — *L'enveloppe des circonférences ayant leurs centres sur une circonférence* C *et tangentes à un diamètre* AB *de* C *est l'épicycloïde en-*

gendrée par une circonférence de rayon moitié moindre que C, *roulant sur* C.

QUESTION. — *Si l'on remplace le diamètre* AB *par une droite quelconque, l'enveloppe est-elle encore une épicycloïde?* (CATALAN.)

Soient C le centre du cercle fixe, O le centre du cercle mobile dans une position quelconque, OI = OM son rayon, M le point de l'enveloppe. MO est normale à la courbe et moitié de PO; le premier fait est une propriété des enveloppes, le second une propriété



du cercle. Je mène au point M une perpendiculaire MT à MO, c'est-à-dire une tangente à l'enveloppe et au cercle mobile O; elle rencontrera en T le diamètre AB; je joins OT, et à cause de IO = MO, j'ai deux triangles égaux IOT, MOT comme rectangles et ayant deux côtés égaux chacun à chacun. Donc les angles IOT, MOT sont égaux, et, par suite, leurs compléments COP, MOQ le sont. Achevons les triangles isocèles COP, MOQ; ils seront semblables comme ayant leurs angles égaux; et puisque $MO = OI = \frac{1}{2} OP$, on aura $OQ = \frac{1}{2} OC$. Donc si du point Q comme centre, avec un rayon OQ, on décrit un cercle qui passera par le point M et sera tangent en O au cercle C, ce cercle Q aura constamment son rayon égal à la moitié de celui de la circonférence C; partant, puisque les angles MQO, OCP sont égaux, l'arc MO intercepté entre les côtés de l'angle MQO sur la petite circonférence sera égal à la moitié de l'arc OP intercepté entre les côtés de l'angle OCP sur la grande circonférence; en un mot, l'arc $MO = OB = \frac{1}{2} OBP$. Donc un point quelconque de l'enveloppe appartiendra à l'épicycloïde engendrée par un point de la circonférence de rayon moitié moindre roulant sur C, et se trouvant en contact avec la circonférence C aux points A et B. C. Q. F. D.

Lorsqu'on examine la formation d'une épicycloïde, il est évident que tous les points de rebroussement, lorsqu'il y en a, et il doit toujours y en avoir, sont sur le cercle fixe; que les distances de ces points de rebroussement, mesurées sur ce cercle fixe, soit par les arcs interceptés, soit par leurs cordes, sont les mêmes pour toutes; et que leurs distances maxima entre les cordes dont il s'agit et le point le plus éloigné de l'arc d'épicycloïde correspondant est constant. Il est également évident que si AB cesse d'être un diamètre, mais coupe le cercle C, et que du centre C on abaisse une perpendiculaire KL sur AB, l'enveloppe sera symétrique par rapport à KL; qu'elle aura des points de rebroussement en A et B; mais que ses écarts maxima de AB, situés sur la perpendiculaire KL, et égaux au double de la perpendiculaire abaissée des points K et L de la circonférence C sur AB, seront inégaux; elle ne peut donc pas être une épicycloïde. Et cela est plus vrai encore quand AB cesse de couper la circonférence C, puisqu'il n'y a plus de rebroussement.

Donc l'enveloppe ne peut plus être une épicycloïde quand AB cesse d'être un diamètre. C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Mirza-Nizam, Moulins, Contet, Laquière, Courtin et Godart, Léon Dyrion.

Même question;

Par M. Paul MANSION (de Marchin).

Je tirerai la démonstration du théorème, d'un théorème plus général que je vais énoncer : j'y emploie le terme *hypocycloïde*, pour désigner la courbe engendrée par un point d'un cercle roulant dans un cercle, en ayant sa concavité tournée du même côté ; épicycloïde, quand les concavités sont tournées en sens contraire. Cela posé :

Si deux cercles égaux, l'un intérieur, l'autre extérieur, roulent sur un troisième cercle fixe, les courbes décrites par les points des deux cercles mobiles primitivement en contact peuvent être considérées comme les enveloppes d'un même cercle dont le centre serait sur la circonférence fixe et dont le rayon variable serait constamment égal à la droite qui joint le point décrivant de l'hypocycloïde au point de contact correspondant.

Soit A le point de départ commun de l'épicycloïde et de l'hypocycloïde ; M le point de contact commun des deux cercles dans une de leurs positions quand les points décrivants de l'épicycloïde et de l'hypocycloïde sont m et m'. Le cercle dont le rayon est Mm' et qui a son centre au point M passera par m. En effet, $Mm' = Mm$, comme cordes d'arcs égaux dans des cercles égaux, car arc Mm = arc MA = arc Mm'. D'ailleurs, ce cercle est constamment tangent à l'épicycloïde et à l'hypocycloïde, car, d'après la propriété fondamentale de ces courbes,

Mm, Mm' leur sont respectivement normales. Le théorème général est donc démontré.

Pour en tirer le théorème particulier énoncé par M. Catalan, il suffit de remarquer que l'*hypocycloïde*, engendrée par un cercle roulant dans un cercle de rayon double, est un diamètre du grand cercle. Mais cette propriété est trop connue pour la démontrer ici.

Question 670;

PAR M. CONTET,
Élève du lycée de Besançon.

Dans l'hyperbole équilatère, le produit de la distance d'un point de la directrice au centre, par la tangente de l'angle sous lequel on voit de ce point l'hyberbole, égale l'axe transverse. (FAURE.)

Soit l'hyperbole équilatère

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

La distance d'un point quelconque $P\left(\frac{a^2}{c}, \beta\right)$ de la directrice $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ au centre de l'hyperbole est

$$l = \sqrt{\beta^2 + \frac{a^2}{2}}.$$

Les tangentes à l'hyperbole devant passer par le point P, on aura l'équation de condition

$$\beta = m\frac{a}{\sqrt{2}} \pm a\sqrt{m^2 - 1},$$

dans laquelle le coefficient angulaire m est l'inconnue. Cette équation, mise sous forme entière,

$$\frac{a^2}{2}m^2 + \frac{2a\beta}{\sqrt{2}}m - (a^2 + \beta^2) = 0,$$

est du second degré; ses deux racines donnent les directions des tangentes menées du point P à l'hyperbole.

L'angle v, sous lequel on voit du point P l'hyperbole, est donné par le calcul suivant

$$\operatorname{tang} v = \frac{m'' - m'}{1 + mm'} = \frac{-4\sqrt{\left(\beta^2 + \frac{a^2}{2}\right)}}{a\left[1 - \frac{2(a^2 + \beta^2)}{a^2}\right]} = \frac{2a}{\sqrt{\beta^2 + \frac{a^2}{2}}};$$

on a donc

$$l \operatorname{tang} v = 2a. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

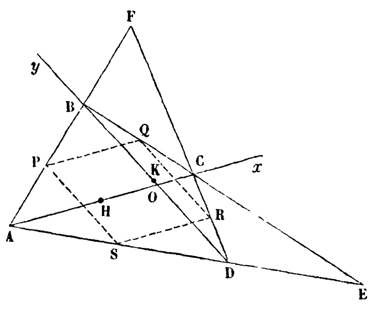
Question 625

(voir 2e série, t. Ier, p. 382);

PAR M. JACQUIN.

Les six points milieux des côtés et des diagonales d'un quadrilatère, les deux points où se coupent les côtés opposés, le point d'intersection des deux diagonales, sont sur une même ligne du second degré.

Lorsque les quatre sommets du quadrilatère appartiennent à une circonférence, la ligne du second degré



sur laquelle se trouvent les neufs points désignés est une *hyperbole équilatère qui passe par le centre de la circonférence et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles que forment les deux diagonales du quadrilatère.*

Soient ABCD le quadrilatère; P, Q, R, S les milieux des côtés AB, BC, CD, DA; O le point d'intersection des diagonales AC, BD, que je prendrai pour axes des coordonnées.

Soient de plus $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$; les équations des côtés PS, PQ, QR, RS du parallélogramme PQRS seront respectivement

$$2x = a, \quad 2y = b, \quad 2x = c, \quad 2y = d;$$

et par suite celle d'une conique passant par les quatre points P, Q, R, S,

$$(2x - a)(2x - c) + \lambda(2y - b)(2y - d) = 0.$$

Cette courbe passera au point O si l'on a

$$ac + \lambda bd = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = -\frac{ac}{bd}.$$

Remplaçant λ par cette valeur, l'équation de la conique qui passe par les cinq points O, P, Q, R, S sera

$$(1) \qquad bdx\left(x - \frac{a+c}{2}\right) - acy\left(y - \frac{b+d}{2}\right) = 0,$$

et sous cette forme on reconnaît qu'elle passe aussi par les deux points H, K, milieux des diagonales AC, BD du quadrilatère.

On vérifie facilement que l'équation (1) de la conique est satisfaite par les coordonnées

$$x = \frac{ac(b-d)}{ab-cd}, \quad y = \frac{bd(a-c)}{ab-cd}$$

du point d'intersection E des côtés opposés BC, AD du quadrilatère.

On vérifierait aussi de la même manière que les coordonnées du point d'intersection F des deux autres côtés satisfont à cette équation. Ainsi les neuf points en question sont situés sur une même conique.

Si le quadrilatère ABCD est inscriptible, $ac = bd$ et l'équation (1) se réduit à

$$(2) \qquad x^2 - y^2 - \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2}y = 0.$$

Dans ce cas, elle représente une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les axes.

Le cercle circonscrit au quadrilatère a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - (a+c)x - (b+d)y + ac = 0,$$

θ désignant l'angle des axes. Les coordonnées du centre de ce cercle seront données par les équations

$$x + y\cos\theta = \frac{a+c}{2},$$
$$y + x\cos\theta = \frac{b+d}{2}.$$

Multipliant la première par x et la deuxième par y et retranchant membre à membre, on obtient l'équation (2). Donc l'hyperbole passe par le centre du cercle.

Note. — La question 670 (p. 202) a encore été résolue par MM. Sellcron, de Trenquelléon, Grouard, Josselin, Muzeau, Dupain, Mirza-Nizam, Picquet, de Saint-Prix et Tivollier, Léon Dyrion, du Mesnil, Courtin et Godart, de Vigneral.