BRASSINNE

# Note sur les surfaces du second ordre

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 3 (1864), p. 248-250

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__248_1>

## NOTE SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. BRASSINNE.

Dans les ouvrages de Géométrie analytique les plus récents, il n'est pas fait mention du procédé de calcul que Lagrange emploie (*Mécanique analytique*, 1788, t. II, section 9) pour simplifier l'équation des surfaces du second ordre.

On n'a emprunté à cet important chapitre que la transformation des coordonnées rectangulaires dans l'espace, au moyen de trois déplacements successifs. Reproduisons, en l'abrégeant, une méthode élégante, qui doit prendre place dans les éléments :

1° L'équation de la surface du second ordre, ayant un centre et deux axes coordonnés $x, y$ dans la direction d'un système conjugué rectangulaire, est

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'xz + 2B''yz = 1.$$

Cette forme, toujours possible avec des axes rectangulaires, étant admise, il est aisé de démontrer qu'il existe un système conjugué et rectangulaire pour lequel l'équation de la surface est

$$(2) \qquad Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 = 1.$$

On regarde P, P', P'' comme des inconnues, et après avoir transformé l'équation (2) au moyen des formules

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{aligned}$$

on l'identifie avec l'équation (1) et on trouve facilement :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &P\alpha^2 + P'\alpha'^2 + P''\alpha''^2 = A, \\ &P\beta^2 + P'\beta'^2 + P''\beta''^2 = A', \\ &P\gamma^2 + P'\gamma'^2 + P''\gamma''^2 = A'', \\ &P\alpha\beta + P'\alpha'\beta' + P''\alpha''\beta'' = 0, \\ &P\alpha\gamma + P'\alpha'\gamma' + P''\alpha''\gamma'' = B', \\ &P\beta\gamma + P'\beta'\gamma' + P''\beta''\gamma'' = B''. \end{aligned} \right.$$

Or Lagrange prend d'abord pour inconnues $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$, et il détermine $P\alpha$ en multipliant la première relation du groupe (3) par $\alpha$, la quatrième par $\beta$, la cinquième par $\gamma$, et ajoutant les trois résultats ; il obtient, en vertu des conditions connues et en opérant d'une manière analogue pour $P\beta$, $P\gamma$ :

$$\begin{aligned} P\alpha &= A\alpha + B'\gamma, \\ P\beta &= A'\beta + B''\gamma, \\ P\gamma &= A''\gamma + B'\alpha + B''\beta. \end{aligned}$$

Éliminant de ces dernières relations $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, on arrive presque sans calcul à l'équation du troisième degré

$$(4) \quad (P-A)(P-A')(P-A'') - B'^2(P-A') - B''^2(P-A) = 0,$$

dont les racines ou valeurs de P sont les expressions de

$\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, en désignant des axes par $a$, $b$, $c$ : or, si l'on a $A > A' > A''$, la substitution pour P de $+\infty$, A, A'', $-\infty$ démontre que les trois racines sont réelles.

2° Sans autre calcul que la résolution de l'équation de la surface du second ordre, on voit que, dans un nombre infini de cas, elle prend, avec des axes obliques, la forme

$$(5) \qquad Ax^2 + A'y^2 + Mz^2 = 1.$$

On peut même supposer que $x$, $y$ sont rectangulaires et que $z$ fait avec ces directions des angles $\theta$, $\theta'$. Si par l'origine O on mène au plan $xy$ une perpendiculaire $Oz'$, on passera du système oblique au rectangulaire $x$, $y$, $z'$, en éliminant de l'équation (5), $x$, $y$, $z$ au moyen des formules

$$x' = x + z\cos\theta, \quad y' = y + z\cos\theta', \quad z' = z\cos\theta''.$$

Le résultat sera

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & Ax'^2 + A'y'^2 + \left(\frac{M}{\cos^2\theta''} + \frac{A\cos^2\theta}{\cos^2\theta''} + \frac{A'\cos^2\theta'}{\cos^2\theta''}\right) z'^2 \\ & \qquad - 2.\frac{A\cos\theta}{\cos\theta''}x'z' - 2.\frac{A'\cos\theta'}{\cos\theta''}y'z' = 1. \end{aligned} \right.$$

Cette équation a la forme (1) que nous avons supposée d'abord. Remplaçant A'', B', B'' par leurs nouvelles valeurs et faisant $A = \frac{1}{a'^2}$, $A' = \frac{1}{b'^2}$, $M = \frac{1}{c'^2}$, l'équation du troisième degré devient

$$\begin{aligned} & P^3 - \frac{P^2}{\cos^2\theta''}\left(\frac{1}{c'^2} + \frac{1}{a'^2}\sin^2\theta + \frac{1}{b'^2}\sin^2\theta\right) \\ & \quad + \frac{P}{\cos^2\theta''}\left(\frac{1}{a'^2b'^2} + \frac{1}{a'^2c'^2} + \frac{1}{b'^2c'^2}\right) - \frac{1}{a'^2b'^2c'^2\cos^2\theta''} = 0. \end{aligned}$$

Les relations des racines et des coefficients expriment les trois théorèmes fondamentaux sur les diamètres conjugués.