Nouvelles annales de mathématiques

Painvin

Recherche des points multiples à l'infini dans les courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 241-248

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__241_0>

RECHERCHE DES POINTS MULTIPLES A L'INFINI DANS LES COURBES ALGÉBRIQUES

(voir page 193);

PAR M. PAINVIN.

§ IV. — *Exemples.*

XI. — Je vais maintenant indiquer plusieurs courbes faciles à construire complétement, et présentant les diverses particularités que je viens de signaler.

J'appliquerai aux deux premiers exemples la méthode générale que je viens de développer.

XII. — 1° Soit la courbe

$$2yx^3 - y^2 - x = 0,$$

ou, en rendant l'équation homogène,

$$(1)\qquad 2yx^3 - y^2z^2 - xz^3 = 0.$$

Les directions asymptotiques sont données par l'équation

$$yx^3 = 0.$$

Étudions d'abord le point à l'infini I ($y = 0$, $z = 0$) : l'axe des x est la direction asymptotique. Pour cela, cherchons l'intersection de la courbe (1) par la droite quelconque passant par ce point

$$(2)\qquad y = \lambda z;$$

on a

$$(3)\qquad 2\lambda x^3 z - xz^3 - \lambda^2 z^4 = 0;$$

donc une droite quelconque passant par le point ($y = 0$,

$z = 0$) ne rencontre la courbe qu'en un seul point, car le premier membre de l'équation (3) n'admet que le facteur z ; donc le point I est un *point simple*. Exprimons que la droite (2) est tangente : il faut faire pour cela $\lambda = 0$, et le premier membre de l'équation (3) est divisible par z^3 ; donc la droite ($y = 0$) rencontre la courbe au point simple I en trois points coïncidents ; le point I à l'infini est donc un *point d'inflexion*, la droite $y = 0$ est la tangente d'inflexion.

Étudions le point J ($x = 0$, $z = 0$) : l'axe des y est la direction asymptotique. Pour cela, cherchons l'intersection de la courbe (1) par la droite quelconque passant par le point J

$$\lambda x - z = 0; \tag{4}$$

on a, en remplaçant z par λx,

$$-\lambda^2 y^2 x^2 + 2yx^3 - \lambda^3 x^4 = 0; \tag{5}$$

le premier membre de l'équation (5) est divisible par x^2 quel que soit λ, le point J est donc un *point double*. Pour que la droite (4) soit tangente, il faut annuler le coefficient de x^2, ce qui donne $\lambda^2 = 0$; ainsi, au point double J, les deux tangentes proprement dites se confondent avec la droite $z = 0$; donc le point J est un *point de rebroussement* ; la tangente de rebroussement est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique. Lorsqu'on fait $\lambda = 0$, le premier membre de l'équation (5) devient divisible par x^3, et seulement par x^3 ; c'est donc un rebroussement de première espèce.

XIII. — 2° Soit la courbe

$$y^3 - y^2 - x = 0,$$

ou, en rendant l'équation homogène,

$$y^3 - y^2 z - xz^2 = 0. \tag{1}$$

Les directions asymptotiques sont données par l'équation

$$y^3 = 0.$$

On a donc la seule direction asymptotique $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des x; le point à l'infini correspondant I est ($y = 0$, $z = 0$). Cherchons l'intersection de la courbe (1) par une droite quelconque passant par ce point

$$(2) \qquad \lambda y - z = 0.$$

(Je prends ici, comme dans le second cas de la courbe précédente, $\lambda y - z = 0$ au lieu de $y - \lambda z = 0$; c'est qu'en prenant cette seconde forme on est conduit à une valeur infinie pour λ; la première forme est alors plus commode pour la discussion, et on pourra constater, dans l'étude des autres courbes, l'utilité de cette remarque.)

Cherchons l'intersection de la droite (2) avec la courbe (1), on a

$$(3) \qquad -\lambda^2 x y^2 - \lambda y^3 + y^3 = 0.$$

Le premier membre de l'équation (3) est divisible par y^2, quel que soit λ; le point I est donc un *point double*. Pour que la droite (2) soit tangente, il faut annuler le coefficient de y^2, ce qui conduit à $\lambda^2 = 0$; ainsi, au point double I, les deux tangentes proprement dites se confondent avec la droite $z = 0$; le point I est donc un *point de rebroussement:* la tangente de rebroussement est la droite à l'infini, parallèle à la direction asymptotique. Lorsqu'on fait $\lambda = 0$, le premier membre de l'équation (3) est et ne peut être divisible que par y^3; c'est un rebroussement de première espèce.

XIV. — *Exemples.*

$$(\mathrm{I}) \qquad 2yx^3 - y^2 - x = 0.$$

Un point d'inflexion à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x, la tangente d'inflexion est l'axe des x. Un point double à l'infini, dont les deux tangentes se confondent avec la droite à l'infini, c'est-à-dire un point de rebroussement dont la tangente est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique ; la direction asymptotique est l'axe des y. Courbe de neuvième classe.

(II) $$y^3 - y^2 - x = 0.$$

Un point double à l'infini, dont les deux tangentes se confondent avec la droite à l'infini, c'est-à-dire un point de rebroussement dont la tangente est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique, laquelle est l'axe des x. Courbe de troisième classe.

(III) $$x^3 - 2xy + y^2 = 0.$$

Un point d'inflexion à l'infini, la tangente d'inflexion est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique, laquelle est l'axe des y. Point double à l'origine. Courbe de quatrième classe.

(IV) $$xy^2 - y^2 - x = 0.$$

Un point d'inflexion à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y. Un point double à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x. Courbe de quatrième classe.

(V) $$x^2 y^2 + (y - x)^3 = 0.$$

La droite à l'infini est une tangente double, les directions asymptotiques sont l'axe des x et l'axe des y. Un point triple à l'origine dont les trois tangentes se confondent, une seule branche est réelle. Courbe de quatrième classe.

(VI) $$x^2 y^2 (y - x)^2 - (x + y)^5 = 0.$$

La droite à l'infini est une tangente triple, les directions asymptotiques sont l'axe des x, l'axe des y, et la bissectrice des axes. L'origine est un point quintuple dont les cinq tangentes se confondent, une seule branche est réelle. Courbe de sixième classe.

(VII) $$x(x+y)^2+3y(x+y)+2x=0.$$

Un point double à l'infini, dont les asymptotes sont à des distances finies et réelles, la direction asymptotique est la deuxième bissectrice des axes. Un point simple à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y. Courbe de quatrième classe.

(VIII) $$x(x+y)^2+4y(x+y)+4x=0.$$

Un point de rebroussement à l'infini, la direction asymptotique est la deuxième bissectrice des axes. Un point simple à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y. Courbe de troisième classe.

(IX) $$x(x+y)^2+y(x+y)+x=0.$$

Un point double isolé à l'infini, la direction asymptotique est la deuxième bissectrice des axes. Un point simple à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y. Courbe de quatrième classe.

(X) $$y^2(x-1)^2(x-3)=1.$$

Un point triple à l'infini, dont fait partie un point de rebroussement isolé, la direction asymptotique est l'axe des y. Un point de rebroussement réel à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x. Courbe de dixième classe.

(XI) $$y^3-xy+x=0.$$

Un point double à l'infini, dont une des tangentes est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique, laquelle est l'axe des x. Courbe de quatrième classe.

(XII) $$x^4 - 2x^2y + y^3 = 0.$$

Point simple à l'infini, la tangente est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique; cette tangente a avec la courbe, en ce point, un contact du troisième ordre; la direction asymptotique est l'axe des y. Un point triple à l'origine. Courbe de sixième classe.

(XIII) $$(x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2) - x^2 = 0.$$

Les deux points circulaires à l'infini (points imaginaires) sont des points doubles de la courbe. L'origine est un point de rebroussement. Courbe de cinquième classe.

(XIV) $$x^2y^2 + 3x^2y + y^2 - 4x^2 = 0.$$

Un point double isolé à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y. Un point double à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x. Un point double à l'origine. Courbe de sixième classe.

(XV) $$x^2y^2 + 2y(x^2 - y^2) + x^2 = 0.$$

Un point simple à l'infini dont la tangente est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique, laquelle est l'axe des y. Un point de rebroussement isolé à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x. Un point de rebroussement à l'origine. La courbe est de sixième classe.

(XVI) $$x^2y^2 + 2xy(x + 2y) + (x - 2y)^2 = 0.$$

Deux points de rebroussement à l'infini, les directions asymptotiques sont l'axe des x et l'axe des y. Un point de rebroussement à l'origine. Courbe de troisième classe.

(XVII) $$xy^3 - y + 1 = 0.$$

Un point triple à l'infini dont les trois tangentes se confondent, une seule branche est réelle; la direction asymptotique est l'axe des x. Un point d'inflexion à l'infini ayant pour tangente l'axe des y. Courbe de quatrième classe.

(XVIII) $$y^5 + 3y^4 - 2yx^2 - x^2 + 1 = 0.$$

Un point triple à l'infini dont deux tangentes coïncident avec la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique, laquelle est l'axe des x; les tangentes au point triple ont avec la courbe un contact du second ordre. Courbe de treizième classe.

(XIX) $$x^7 y^4 - 2x^6 y^2 + x^5 - 1 = 0.$$

Un point septuple à l'infini dont les sept tangentes coïncident avec l'axe des y, le contact est du quatrième ordre; une seule branche est réelle. Un point quadruple à l'infini, dont les quatre tangentes coïncident avec l'axe des x; le contact est du deuxième ordre. La courbe est de la quarante-septième classe.

(XX) $$x^3 y^3 + xy^2 + 1 = 0.$$

Deux points triples dont les trois tangentes se confondent, les directions asymptotiques sont l'axe des y; suivant l'axe des y, le contact est du troisième ordre; suivant l'axe des x, le contact est aussi du troisième ordre; une seule branche est réelle. Courbe de quatorzième classe.

XV. — L'importance de la recherche des points multiples à l'infini est incontestable. Cette étude permet, en effet, de voir plus nettement la manière dont la courbe se dirige vers l'infini, et de construire avec plus de sûreté les branches paraboliques, pour lesquelles l'asymptote est transportée à l'infini, mais parallèlement à une direction déterminée; elle est surtout indispensable pour reconnaître la cause de la diminution de la classe pour la courbe, car cette diminution tient à la présence des points multiples, situés tant à l'infini qu'à distance finie.

On verra aussi, par les exemples que j'ai cités, la manière dont les branches de la courbe sont disposées par rapport à l'asymptote, suivant que le point à l'infini correspondant est ou un point simple ordinaire, ou un point simple d'inflexion, ou un point double, ou un point de rebroussement, etc.

Je donnerai bientôt l'étude des points à l'infini sur les surfaces; cette recherche présente un grand intérêt, et rattache à des idées générales les notions partielles qu'on donne, dans les cours, sur les cônes asymptotes des surfaces du second ordre.