NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 223-235
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__223_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 533

(voir tome XIX, page 248);

PAR M. NESTOR PLISSART (DE LIÉGE).

Soient deux cercles égaux dans le même plan; P un point variable duquel on mène des tangentes aux cercles, et dont le produit est constant. Le lieu de ces points est la podaire du centre d'une ellipse.

Cet énoncé me semble trop général, et je crois que cette propriété n'est vraie que dans un cas particulier. Soient en effet les deux cercles C et C' égaux et P un point tel, que le produit des tangentes PR, PR' menées de ce point aux deux cercles soit égal à la quantité donnée k^2. Je prends pour axe des x la droite CC' et pour axe des y la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite. Soit r le rayon des deux cercles; je représente OC par α.

On a

$$\mathrm{PR} \times \mathrm{PR'} = k^2$$

$$\sqrt{\overline{\mathrm{PC}}^2 - r^2} \times \sqrt{\overline{\mathrm{PC'}}^2 - r^2} = k^2$$

$$\overline{\mathrm{PC}}^2 \times \overline{\mathrm{PC'}}^2 - r^2\left(\overline{\mathrm{PC}}^2 + \overline{\mathrm{PC'}}^2\right) + r^4 = k^4,$$

x et y étant les coordonnées du point P.

$$[(x-\alpha)^2 + y^2]$$
$$\times [(x+\alpha)^2 + y^2)] - r^2(2x^2 + 2\alpha^2 + 2y^2) + r^4 = k^4,$$

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{array}{l} (x^2+y^2)^2 = x^2(2r^2 + 2\alpha^2) + y^2(2r^2 - 2\alpha^2) \\ \qquad - (\alpha^2 - r^2)^2 + k^4. \end{array} \right.$$

Telle est l'équation du lieu du point P; la symétrie de la courbe par rapport aux axes montre suffisamment que si cette équation représente la podaire du centre d'une ellipse, ce centre ne peut être que l'origine, et les axes de cette ellipse doivent coïncider avec les axes des coordonnées. Or l'équation de la podaire du centre d'une ellipse, rapportée aux axes de celle-ci, est

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

a et b étant les demi-axes de l'ellipse.

Pour identifier cette équation avec l'équation (A), je dois poser

$$a^2 = 2r^2 + 2\alpha^2$$
$$b^2 = 2r^2 - 2\alpha^2$$
$$k^4 = (r^2 - \alpha^2)^2$$

ou

$$\pm k^2 = r^2 - \alpha^2.$$

Pour que l'équation (A) représente la podaire du centre d'une conique, il faut que l'équation de condition $\pm k^2 = r^2 - \alpha^2$ soit satisfaite.

Si $r < \alpha$, on prendra pour k^2 le signe inférieur, et l'équation (A) nous donne la podaire du centre d'une hyperbole, car b^2 est négatif; c'est le cas où les deux cercles donnés par l'hypothèse sont extérieurs l'un à l'autre.

Si $\alpha = r$, c'est-à-dire si les deux cercles se touchent extérieurement, $k = 0$ et l'équation (A) se réduit à

$$(x^2+y^2)^2 = 4r^2x^2,$$

ou

$$x^2+y^2 = \pm 2rx,$$

équation qui représente les deux cercles donnés.

Si $r > \alpha$, les deux cercles se coupent, et l'équation (A) est celle de la podaire du centre d'une ellipse. Si la condition $\pm k^2 = r^2 - \alpha^2$ n'est pas satisfaite, l'équation (A) ne peut plus représenter la podaire du centre d'une conique; elle ne peut même pas représenter la podaire d'aucun point du plan de cette conique. Car, comme il est facile de s'en convaincre, aucune podaire, elliptique ou hyperbolique, hormis celle du centre de la courbe, n'admet de centre de figure; tandis que l'origine est évidemment un centre de la courbe représentée par l'équation (A).

Voyons maintenant ce qu'exprime la condition

$$\pm k^2 = r^2 - \alpha^2.$$

Elle exprime que le carré donné k^2 est égal au carré de la tangente menée de l'origine à l'un des cercles, c'est-à-dire, que l'origine est un point du lieu. Si l'on a $r > \alpha$, l'origine est à l'intérieur des deux cercles; la tangente menée par l'origine est imaginaire; k^2 est le carré de cette tangente pris positivement, et l'origine est un point isolé de la courbe; en passant aux coordonnées polaires, l'équation devient

$$\rho^2 = (2r^2 + 2\alpha^2)\cos^2\omega + (2r^2 - 2\alpha^2)\sin^2\omega.$$

Si l'on a $\alpha > r$, l'origine au lieu d'être un point isolé est un point quadruple, l'équation polaire de la courbe est

$$\rho^2 = \cos^2\omega\,(2r^2 + 2\alpha^2) - \sin^2\omega\,(2\alpha^2 - 2r^2).$$

Les asymptotes de l'hyperbole génératrice touchent la podaire à l'origine.

Question 663;

PAR MM. H. PICQUET ET MAX. CORNU,
Élèves de l'institution Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

Les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans *un tétraèdre quelconque sont sur une même surface du troisième ordre qui contient toutes les arêtes du tétraèdre.* (BELTRAMI.)

On sait que si l'on considère dans un plan un triangle ABC et les centres o, o', o'', o''', des cercles inscrit et exinscrits, le triangle formé par trois quelconques des centres est tel, que le quatrième est le point de rencontre de ses hauteurs, et le cercle des neuf points de ce dernier triangle passe par les milieux des six droites qui joignent les quatre centres deux à deux et par les sommets du triangle ABC. D'ailleurs, ce cercle est le lieu des centres des hyperboles équilatères passant par les quatre centres o, o', o'', o'''; car, bien qu'une hyperbole équilatère soit déterminée par quatre points, comme toute hyperbole équilatère passant par trois des centres passe par le quatrième qui est le point de rencontre des hauteurs du triangle des trois premiers, il en passe une infinité par les quatre centres; d'autre part, toute courbe du second degré passant par les quatre centres est une hyperbole équilatère. Il en résulte donc que la courbe du second degré passant par les points milieux des six droites qui joignent deux à deux les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC, et par les sommets du triangle ABC, est le lieu des centres des courbes du second degré passant par les centres de ces cercles.

Il est donc naturel, pour démontrer le théorème proposé qui est analogue au précédent dans l'espace, de chercher l'équation d'une surface du second degré passant par les centres des huit sphères inscrite et exinscrites au tétraèdre; il restera dans son équation deux indéterminées, car toute surface du second degré passant par sept des centres passera par le huitième, et il faut neuf points pour la déterminer; on cherchera le lieu des centres de ces surfaces, ce qui donnera trois équations entre lesquelles on éliminera les deux indéterminées, et l'on obtiendra l'équation de la surface du troisième degré cherchée.

Pour trouver l'équation de la surface du second degré passant par les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre, nous nous servirons d'une propriété énoncée dans le *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* du R. Salmon, p. 113.

Si dans l'équation d'un hyperboloïde on suppose que la somme des coefficients de x^2, y^2 et z^2 soit nulle, cet hyperboloïde passe par le centre de la sphère inscrit dans un tétraèdre conjugué de la surface, et par conséquent par les sept autres centres que rien ne distingue analytiquement du premier. Ce tétraèdre est tel, que tout sommet est le pôle de la face opposée par rapport à la surface.

Soient donc

$$P = 0, \quad P' = 0, \quad P'' = 0, \quad P''' = 0$$

les quatre faces du tétraèdre ; l'équation d'un hyperboloïde, par rapport auquel il serait conjugué, est de la forme

$$aP^2 + bP'^2 + cP''^2 + dP'''^2 = 0,$$

car le cône $aP^2 + bP'^2 + cP''^2 = 0$ coupe la surface suivant le plan $P'''^2 = 0$, c'est-à-dire lui est tangent, et la ligne de contact est située dans le plan $P''' = 0$. Donc le sommet du cône, qui est évidemment un des sommets du tétraèdre, est le pôle du plan P'''. Soient alors

$$\begin{aligned}
P &= \alpha x + \beta y + \gamma z + p,\\
P' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + p',\\
P'' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + p'',\\
P''' &= \alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + p''',
\end{aligned}$$

les coefficients des variables étant les cosinus des angles que la normale à chaque plan fait avec les axes. Si nous exprimons que la somme des coefficients de x^2, y^2 et z^2

est nulle, nous aurons la relation

$$a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+b(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)+c(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)$$
$$+d(\alpha'''^2+\beta'''^2+\gamma'''^2)=0$$

ou

$$(1)\qquad a+b+c+d=0.$$

La surface passera alors par les huit centres, et si nous prenons les équations du centre, nous aurons

$$(2)\qquad a.P\alpha+b.P'\alpha'+c.P''\alpha''+d.P'''\alpha'''=0,$$
$$(3)\qquad a.P\beta+b.P'\beta'+c.P''\beta''+d.P'''\beta'''=0,$$
$$(4)\qquad a.P\gamma+b.P'\gamma'+c.P''\gamma''+d.P'''\gamma'''=0.$$

Le résultat de l'élimination de a, b, c, d, entre les équations homogènes (1), (2), (3), (4), sera l'équation

$$(S)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ P\alpha & P'\alpha' & P''\alpha'' & P'''\alpha''' \\ P\beta & P'\beta' & P''\beta'' & P'''\beta''' \\ P\gamma & P'\gamma' & P''\gamma'' & P'''\gamma''' \end{vmatrix} = 0,$$

qui représente bien une surface du troisième degré passant par les arêtes du tétraèdre; car si l'on fait, par exemple, $P=0$, $P'=0$, deux colonnes du déterminant deviennent identiques et l'équation est satisfaite.

Il faut faire voir maintenant que les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des sphères inscrites se trouvent sur la surface. Pour cela, prenons deux centres quelconques; chacun d'eux est donné par l'intersection de trois des plans bissecteurs de trois des dièdres du tétraèdre; comme, dans les équations de chaque face, les coefficients des variables sont les cosinus des angles que la normale fait avec les axes, les plans bissecteurs s'obtiendront en prenant des sommes ou des différences d'équations de deux faces. Considérons, par exemple, la droite qui joint les centres

$$\left\{\begin{array}{l} P - P' = 0, \\ P - P'' = 0, \\ P - P''' = 0, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} P + P' = 0, \\ P + P'' = 0, \\ P + P''' = 0. \end{array}\right.$$

Les plans qui les déterminent sont des plans bissecteurs intérieurs ou extérieurs suivant la position de l'origine, et comme nous ne précisons rien là-dessus, il en résulte que rien ne distingue analytiquement la droite $\left\{\begin{array}{l} P' - P'' = 0 \\ P'' - P''' = 0 \end{array}\right.$ qui les joint des vingt-sept autres, sauf une restriction que nous verrons plus loin, et la proposition sera démontrée si nous faisons voir que son milieu est sur la surface. A cet effet, cherchons l'intersection de la droite $\left\{\begin{array}{l} P' - P'' = 0 \\ P'' - P''' = 0 \end{array}\right.$ avec la surface (S); pour cela, dans l'équation de celle-ci, remplaçons P' et P''' par P'', il vient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ P\alpha & P''\alpha' & P''\alpha'' & P''\alpha''' \\ P\beta & P''\beta' & P''\beta'' & P''\beta''' \\ P\gamma & P''\gamma' & P''\gamma'' & P''\gamma''' \end{vmatrix}$$

$$= P''^2 \left\{ P'' \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma' & \gamma' & \gamma''' \end{vmatrix} + P \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix} \right\}.$$

La solution $P''^2 = 0$, $P' = 0$, $P''' = 0$, qui donne un sommet du tétraèdre, n'est pas celle qui nous convient; nous voyons seulement que deux points d'intersection de la droite et de la surface se sont réunis en un seul. Si nous désignons par Δ et δ les deux déterminants du second membre, les coordonnées du point d'intersection seront fournies par les équations

$$P' = P'', \quad P''' = P'',$$
$$P''\Delta + P\delta = 0$$

ou, en ordonnant,

$$(\alpha''\Delta + \alpha\delta)x + (\beta''\Delta + \beta\delta)y + (\gamma''\Delta + \gamma\delta)x + p''\Delta + p\delta = 0,$$
$$(\alpha' - \alpha'')x + (\beta' - \beta'')y + (\gamma' - \gamma'')z + p' - p'' = 0,$$
$$(\alpha'' - \alpha''')x + (\beta'' - \beta''')y + (\gamma'' - \gamma''')z + p'' - p''' = 0.$$

Le dénominateur commun des valeurs de x, y, z est

$$\begin{vmatrix} \alpha''\Delta + \alpha\delta & \beta''\Delta + \beta\delta & \gamma''\Delta + \gamma\delta \\ \alpha' - \alpha'' & \beta' - \beta'' & \gamma' - \gamma'' \\ \alpha'' - \alpha''' & \beta'' - \beta''' & \gamma'' - \gamma''' \end{vmatrix},$$

qu'on peut écrire

$$\Delta \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha' - \alpha'' & \beta' - \beta'' & \gamma' - \gamma'' \\ \alpha'' - \alpha''' & \beta'' - \beta''' & \gamma'' - \gamma''' \end{vmatrix}$$
$$+ \delta \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' - \alpha'' & \beta' - \beta'' & \gamma' - \gamma'' \\ \alpha'' - \alpha''' & \beta'' - \beta''' & \gamma'' - \gamma''' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient de Δ peut se simplifier : pour cela, ajoutons la première rangée à la seconde, et retranchons-la de la troisième, il viendra

$$\begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ -\alpha''' & -\beta''' & -\gamma''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' \end{vmatrix} = \Delta.$$

Quant au coefficient de δ, il peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \alpha' - \alpha'' & \beta' - \beta'' & \gamma' - \gamma'' & 1 \\ \alpha'' - \alpha''' & \beta'' - \beta''' & \gamma'' - \gamma''' & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons à la première colonne la dernière multipliée par α'', à la seconde la dernière multipliée par β'' et à la troisième la dernière multipliée par γ'', nous aurons

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 1 \\ -\alpha''' & -\beta''' & -\gamma''' & -1 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 1 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & 1 \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & 1 \end{vmatrix} = -\delta .$$

Le dénominateur commun est donc $\Delta^2 - \delta^2$.

Le numérateur de x s'obtiendra en remplaçant, dans les coefficients de Δ et de δ, α, α', α'', α''' par p, p', p'', p''', ce qui donne

$$x = -\frac{\Delta\Delta_\alpha - \delta\delta_\alpha}{\Delta^2 - \delta^2}$$

et, par symétrie,

$$y = -\frac{\Delta\Delta_\beta - \delta\delta_\beta}{\Delta^2 - \delta^2}, \quad z = -\frac{\Delta\Delta_\gamma - \delta\delta_\gamma}{\Delta^2 - \delta^2}.$$

Nous allons faire voir que ces valeurs représentent les demi-sommes des coordonnées des centres considérés.

On aura les coordonnées du premier centre, en résolvant les équations

$$\begin{aligned}
(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma')z + p - p' &= 0,\\
(\alpha - \alpha'')x + (\beta - \beta'')y + (\gamma - \gamma'')z + (p - p'') &= 0,\\
(\alpha - \alpha''')x + (\beta - \beta''')y + (\gamma - \gamma''')z + p - p''' &= 0.
\end{aligned}$$

Leur dénominateur commun sera

$$\begin{vmatrix} \alpha - \alpha' & \beta - \beta' & \gamma - \gamma' \\ \alpha - \alpha'' & \beta - \beta'' & \gamma - \gamma'' \\ \alpha - \alpha''' & \beta - \beta''' & \gamma - \gamma''' \end{vmatrix},$$

qu'on peut écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha-\alpha' & \beta-\beta' & \gamma-\gamma' \\ 0 & \alpha-\alpha'' & \beta-\beta'' & \gamma-\gamma'' \\ 0 & \alpha-\alpha''' & \beta-\beta''' & \gamma-\gamma''' \end{vmatrix},$$

et, en retranchant la première rangée de toutes les autres,

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ -1 & -\alpha' & -\beta' & -\gamma' \\ -1 & -\alpha'' & -\beta'' & -\gamma'' \\ -1 & -\alpha''' & -\beta''' & -\gamma''' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \gamma'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix}$$

ou

$$- \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix} = -(\Delta + \delta).$$

Le numérateur de x sera évidemment

$$-(\Delta_\alpha + \delta_\alpha),$$

de sorte que

$$x = -\frac{\Delta_\alpha + \delta_\alpha}{\Delta + \delta}, \quad y = -\frac{\Delta_\beta + \delta_\beta}{\Delta + \delta}, \quad z = -\frac{\Delta_\gamma + \delta_\gamma}{\Delta + \delta}.$$

Pour avoir les coordonnées de l'autre centre, il suffit de changer de signe les lettres accentuées, ce qui donne

$$x' = -\frac{\delta_\alpha - \Delta_\alpha}{\delta - \Delta}, \quad y' = -\frac{\delta_\beta - \Delta_\beta}{\delta - \Delta}, \quad z' = -\frac{\delta_\gamma - \Delta_\gamma}{\delta - \Delta},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{x + x'}{2} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_\alpha + \delta_\alpha}{\delta + \Delta} + \frac{\delta_\alpha - \Delta_\alpha}{\delta - \Delta}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{2\delta_\alpha\delta - 2\Delta_\alpha\Delta}{\delta^2 - \Delta^2} = -\frac{\Delta\Delta_\alpha - \delta\delta_\alpha}{\Delta^2 - \delta^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{y+y'}{2} = -\frac{\Delta\Delta_\beta - \delta\delta_\beta}{\Delta^2 - \delta^2}, \quad \frac{z+z'}{2} = -\frac{\Delta\Delta_\gamma - \delta\delta_\gamma}{\Delta^2 - \delta^2}.$$

C. Q. F. D.

Il est bon de remarquer que sur les vingt-huit droites seize seulement jouissent de la propriété de passer par un sommet du tétraèdre, et il en passe quatre par chaque sommet. La droite à laquelle nous venons d'appliquer le calcul se trouve dans ce cas, et nous avons vu qu'au sommet par où elle passe deux de ses points d'intersection avec la surface se sont réunis en un seul; elle n'est pas pour cela tangente, car la surface présente à chaque sommet un point singulier; en ce point un cône du second degré lui est tangent : car si nous faisons $P' = x$, $P'' = y$, $P''' = z$, l'équation de la surface se réduit, comme il est facile de le voir, à

$$xyz + (\alpha x + \beta y + \gamma z + p)(\alpha yz + \beta zx + \gamma xy) = 0,$$

et le cône $\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0$ est tangent à la surface à l'origine; nous voyons qu'il renferme les trois arêtes aboutissant à l'origine, et non les droites telles que

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Quant aux douze autres droites, le calcul du point milieu, bien qu'un peu différent du précédent, lui est pourtant analogue, et il n'est pas nécessaire de le répéter. Le dénominateur commun des valeurs de x, y, z, au lieu d'être une différence de carrés de déterminants, serait une différence de carrés de différences de déterminants. Chacune de ces douze droites s'appuie sur deux arêtes opposées du tétraèdre; car si, par exemple, nous considérons la droite

$$\begin{cases} P = P', \\ P'' = P''', \end{cases}$$

et que nous remplacions P' par P et P''' par P'' dans l'équation de la surface, nous obtenons le facteur PP'', ce qui fournit les solutions

$$\begin{array}{ll} P = 0, & P = P', \\ P' = 0, & P'' = 0, \\ P'' = P''', & P''' = 0; \end{array}$$

donc la droite rencontre les arêtes opposées

$$\left\{\begin{array}{l} P = 0, \\ P' = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} P'' = 0, \\ P''' = 0. \end{array}\right.$$

Nota. — Ce théorème se rattache intimement à un théorème de M. Painvin (*Propriétés du système des surfaces du second ordre conjuguées par rapport à un tétraède fixe*, p. 32, théorème XVII) dont voici l'énoncé :

Lorsque les surfaces conjuguées passent par un point fixe, le pôle d'un plan fixe décrit une surface du troisième ordre passant par les arêtes du tétraèdre. Les sommets du tétraèdre sont des points doubles de la surface.

Son équation est

$$Ax_0^2 yzt + By_0^2 xzt + Cz_0^2 xyt + Dt_0^2 xyz = 0,$$

x, y, z, t représentant les quatre faces du tétraèdre. On voit donc qu'elle est de même forme que celle que nous avons trouvée. Dans le cas qui nous occupe, le point fixe est le centre d'une sphère inscrite; le centre des surfaces conjuguées, qui est le pôle d'un plan qui s'est éloigné indéfiniment, décrira alors, d'après le théorème de M. Painvin, une surface du troisième degré qui est celle dont nous avons trouvé l'équation.

Note du Rédacteur. — C'est par erreur que nous avons indiqué M. Picquet comme ayant démontré la seconde égalité de la question 681 (p. 73) pour des angles quelconques. M. Picquet ne l'avait démontrée que pour des angles dont la somme est égale à $(2n + 1)\pi$.

Question 680
(voir 2e série, t. II, p. 523);

PAR M. LAISANT,
Lieutenant du génie.

Étant donnée une courbe quelconque sur une sphère, si d'un point O *de la sphère on mène l'arc de grand cercle* OA *coupant en* A *la courbe, et qu'on prolonge* OA *en* A' *de manière qu'on ait* $\dfrac{\sin\frac{OA'}{2}}{\sin\frac{OA}{2}} = m$, *le lieu du point* A' *sera une seconde courbe qu'on peut appeler courbe semblable à la première. Démontrer que les surfaces déterminées par ces deux courbes sont entre elles comme* m^2 *est à* 1. (VANNSON.)

Soient OBB' un arc de grand cercle infiniment rapproché de OAA' et AB, A'B' deux arcs de petits cercles perpendiculaires au diamètre de la sphère qui passe par le point O. En prenant les surfaces OAB, OA'B' pour surfaces élémentaires des courbes, on ne néglige que des infiniment petits du deuxième ordre, comme il est aisé de le voir. Mais OA'B', OAB sont évidemment proportionnels aux calottes sphériques qui auraient les cercles A'B', AB pour bases, ou aux hauteurs de ces zones. Donc

$$\frac{OA'B'}{OAB} = \frac{1-\cos OA'}{1-\cos OA} = \left(\frac{\sin\frac{OA'}{2}}{\sin\frac{OA}{2}}\right)^2 = m^2.$$

Si ce rapport m^2 existe entre des éléments correspondants quelconques des deux courbes, il existe donc entre les sommes de ces éléments, c'est-à-dire entre les aires entières. C. Q. F. D.