Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 185-189

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__185_0>

CORRESPONDANCE.

1. On a vu, par la table de 1863, que près de *cent cinquante* collaborateurs prennent part à la rédaction des *Nouvelles Annales*. Nous recevons donc beaucoup de lettres, et en général nous n'avons qu'à nous louer de la politesse de nos correspondants. Nous les remercions de leur zèle, de leurs conseils, de leurs critiques même; mais nous ferons remarquer à un petit nombre d'entre eux que la première politesse de celui qui écrit consiste à signer de son vrai nom, et nous sommes surpris que d'honnêtes jeunes gens oublient cette règle élémentaire du savoir-vivre. A l'avenir, nous regarderons comme non avenues les lettres non signées ou signées de pseudonymes. Les personnes qui ne veulent pas être connues du public sont priées de nous en avertir et de nous communiquer leur adresse.

Les personnes qui résolvent une question sont priées de rappeler toujours en tête de leur solution le numéro de la question, ainsi que l'endroit où elle a été énoncée, et de transcrire l'énoncé en toutes lettres.

2. Un abonné nous demande pourquoi nous n'avons pas donné la biographie de Gergonne et celle de Gauss, que nous avions promises dans notre prospectus de 1863. Nous répondrons que nous en avons été empêchés par l'abondance des matières et par notre désir de faire participer à la publicité des *Annales* un plus grand nombre de nos collaborateurs. Mais tous nos documents sont réunis, et nous saisirons la première occasion de tenir notre promesse.

3. Notre savant ami, M. Hoüel, nous écrit de Bordeaux :

« Le théorème dit de M. Schlœmilch (*) a été démontré, il y a bien longtemps, par Cauchy. Je trouve (*Leçons sur le calcul différentiel*, 1829, 9ᵉ leçon, et MOIGNO, *Calcul différentiel*, t. I, p. 63) ceci :

» Le produit

$$m(n-m+1) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{2} - m\right)^2$$

» croît évidemment avec le nombre entier m, depuis » $m = 1$ jusqu'à $m = \frac{n}{2}$, et comme on a, en conséquence,

$$1 . n < 2(n-1) < 3(n-2) < \ldots < \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right),$$

» il en résulte

$$1.2.3 \ldots n > n^{\frac{n}{2}}. \text{ »}$$

Nous ne demandons pas mieux que de restituer à Cauchy ce que nous avions attribué à M. Schlœmilch. Quant à la démonstration précédente, aussi ingénieuse que peu naturelle, elle porte le caractère distinctif des méthodes d'exposition de Cauchy. Le grand défaut de ces démonstrations si raffinées est d'échapper facilement à la mémoire, ce qui peut causer beaucoup d'embarras dans un examen.

M. Hoüel nous a communiqué, au sujet de la résolution des triangles, diverses remarques qui trouveront place dans notre prochain Rapport sur les compositions de 1863.

4. Le théorème de Cauchy peut être généralisé sans que la démonstration en devienne plus compliquée.

1° Dans toute progression arithmétique, le produit des termes à égale distance des extrêmes est plus grand que

(*) Voir 2ᵉ série, t. II, p. 273.

le produit des extrêmes, car

$$(a+pr)(l-pr)=al+pr(l-a-pr);$$

l est plus grand que $a+pr$; donc la dernière parenthèse est positive et le théorème est démontré.

2° Nous aurons dans toute progression

$$\begin{gathered} al=al,\quad bk>al,\quad cj>al\ldots \\ jc>al,\quad kb>al,\quad al=al, \end{gathered}$$

d'où, multipliant membre à membre,

$$a^2b^2c^2\ldots l^2>a^nl^n.$$

Ce théorème et la démonstration sont de M. Toubins, professeur à Lons-le-Saulnier.

5. *Extrait d'une lettre de M. Catalan.* — « Le problème des huit dames (question 251), proposé en 1852 par M. Lionnet, avait déjà occupé quelques joueurs d'échecs. En 1840, le *Schachzeitung* de Berlin en a publié plusieurs solutions, découvertes par différents amateurs. Dans le savant Traité cité en note (*), le géomètre russe donne l'analyse complète de ce difficile problème, qui admet *quatre-vingt-douze* solutions, dont douze seulement sont distinctes. C'est le résultat remarquable auquel était arrivé antérieurement M. Koralek, par une méthode empirique. »

6. A la page 270 du tome XX des *Nouvelles Annales*, on s'est proposé de trouver la direction des axes de la section plane d'un ellipsoïde; mais des erreurs de calcul ont conduit à une solution entièrement fausse et dont la fausseté est d'ailleurs évidente, puisque les formules trouvées ne contiennent pas les axes de l'ellipsoïde. Cette observation est de M. Beltrami.

(*) *Application de l'Analyse mathématique au jeu des échecs*, par C.-F. de Jaenisch, t. I^er, p. 123.

7. M. Brioschi a démontré, dans son Traité des déterminants, que la condition nécessaire pour qu'une équation du troisième degré ait deux racines égales est

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0;$$

s_0, s_1, s_2, etc., désignant des sommes de puissances semblables des racines de l'équation. M. Zbikowski, de Minsk, en Russie, nous adresse un article où il commente et simplifie la démonstration de M. Brioschi. Nous n'insérons pas le travail, encore assez long, de M. Zbikowski, parce que le théorème qu'il veut démontrer nous semble être une conséquence presque évidente des premiers principes relatifs aux déterminants. En effet, a, b, c étant les racines de l'équation proposée,

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

est la condition d'égalité de deux racines, puisque, d'après le théorème de Vandermonde, le premier membre est égal à $(a-b)(a-c)(b-c)$. Or, si l'on multiplie les trois lignes de ce déterminant : 1° par a^0, b^0, c^0; 2° par a^1, b^1, c^1; 3° par a^2, b^2, c^2, et qu'après chaque opération on ajoute les produits, colonne par colonne, on aura trois lignes qui pourraient remplacer les trois lignes du déterminant (2), ce qui donnera précisément l'égalité (1).

Des théorèmes analogues ont lieu pour les équations de tous les degrés, et l'on pourrait en couvrir des pages entières.

8. Nous avons reçu plusieurs tentatives de solutions de la question 61 : *Deux pyramides convexes, qui ont les*

faces triangulaires égales, chacune à chacune, et semblablement disposées, sont égales; mais toutes pèchent en un point. On oublie le cas où le pied de la hauteur tombe en dehors de la base. La démonstration relative au cas où le pied de la hauteur est dans l'intérieur de la base ne convient plus quand ce point est à l'extérieur, parce que les angles formés par les droites menées de ce point normalement aux côtés de la base peuvent tous augmenter sans que leur somme *algébrique* cesse d'être nulle.

9. *Extrait d'une lettre de M. Mannheim.* — « L'énoncé de la question 648 n'était probablement pas assez clair. La solution de cette question, insérée à la page 62 du numéro de février, est incomplète. MM. Jaufroid et Mansion trouvent, dans le cas général, une équation en ω *qui représente les parallèles aux asymptotes menées par l'origine, les rayons vecteurs tangents à la courbe et ceux qui passent par les points multiples*. Dans le cas du cercle, on ne trouve que les rayons vecteurs tangents, les parallèles aux asymptotes ont disparu, et, dans le cas de la conique (le pôle étant à l'un des foyers), c'est le contraire qui a lieu, ce sont les tangentes qui disparaissent.

» A quoi tiennent ces circonstances?

» Telle est la partie de la question 648 qui reste à résoudre.

» Enfin, si l'on se rend bien compte de la solution de ce dernier point, on répondra facilement à la dernière partie de mon énoncé : *Former des équations d'ordre supérieur au second qui présentent des circonstances analogues.* »