

MIRZA-NIZAM

Théorème sur les surfaces du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 3
(1864), p. 167-168

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__167_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. MIRZA-NIZAM,

Élève externe de l'École Polytechnique.

Lorsqu'un angle trièdre trirectangle a son sommet placé au centre d'une surface du second degré, le plan qui passe par les points d'intersection des arêtes de l'angle avec la surface enveloppe une sphère concentrique à la surface.

Soient O le centre de la surface et ABC le plan qui joint les points d'intersection des arêtes OA, OB, OC, avec la surface. Du centre O j'abaisse une perpendiculaire OM sur le plan ABC. La pyramide triangulaire OABC a pour volume

$$V = \text{surf. ABC} \times \frac{1}{3} OM;$$

elle a aussi pour volume

$$V = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \frac{1}{3} OC.$$

Égalant ces deux valeurs de V, on a

$$2(\text{surf. ABC}) \times OM = OA \cdot OB \cdot OC,$$

ou

$$(1) \quad \frac{1}{OM^2} = \frac{4(\text{surf. ABC})^2}{OA \cdot OB \cdot OC}.$$

La surface du triangle ABC en fonction des trois côtés est

$$S^2 = \frac{(AB + BC + AC)(AB + BC - AC)(AB - BC + AC)(BC + AC - AB)}{16},$$

ou bien effectuant les produits deux à deux, on a

$$S^2 = \frac{[2 \overline{AB} \cdot \overline{BC} + (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2)][2 \overline{AB} \cdot \overline{BC} - (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2)]}{16}$$

ou

$$S^2 = \frac{4 \overline{AB}^2 \cdot \overline{BC}^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2)^2}{16}.$$

Remarquant que les triangles OAB, OAC et OBC sont rectangles, et remplaçant \overline{AB}^2 , \overline{BC}^2 et \overline{AC}^2 par leurs valeurs, et effectuant, on a

$$S^2 = \frac{\overline{AO}^2 \cdot \overline{OC}^2 + \overline{AO}^2 \cdot \overline{OB}^2 + \overline{BO}^2 \cdot \overline{OC}^2}{4}.$$

Remplaçant cette valeur de S^2 dans l'égalité (1), il vient

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} :$$

or, on sait que cette dernière quantité est constante, donc OM est constant, et par suite le plan ABC enveloppe une sphère ayant O pour centre et OM pour rayon.

Un théorème analogue existe pour une courbe à centre et se démontre à peu près de la même manière.