Nouvelles annales de mathématiques

Mirza-Nizam

Théorème sur les surfaces du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 167-168

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__167_0>

THÉORÈME SUR LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

Par M. MIRZA-NIZAM,
Élève externe de l'École Polytechnique.

Lorsqu'un angle trièdre trirectangle a son sommet placé au centre d'une surface du second degré, le plan qui passe par les points d'intersection des arêtes de l'angle avec la surface enveloppe une sphère concentrique à la surface.

Soient O le centre de la surface et ABC le plan qui joint les points d'intersection des arêtes OA, OB, OC, avec la surface. Du centre O j'abaisse une perpendiculaire OM sur le plan ABC. La pyramide triangulaire OABC a pour volume

$$V = \text{surf. ABC} \times \frac{1}{3}\,\text{OM};$$

elle a aussi pour volume

$$V = \frac{1}{2}\,\text{OA}.\text{OB}.\,\frac{1}{3}\,\text{OC}.$$

Égalant ces deux valeurs de V, on a

$$2(\text{surf. ABC}) \times \text{OM} = \text{OA}.\text{OB}.\text{OC},$$

ou

$$\frac{1}{\overline{\text{OM}}^2} = \frac{4(\text{surf. ABC})^2}{\overline{\text{OA}}^2.\overline{\text{OB}}^2.\overline{\text{OC}}^2}. \tag{1}$$

La surface du triangle ABC en fonction des trois côtés est

$$S^2 = \frac{(\text{AB}+\text{BC}+\text{AC})(\text{AB}+\text{BC}-\text{AC})(\text{AB}-\text{BC}+\text{AC})(\text{BC}+\text{AC}-\text{AB})}{16},$$

ou bien effectuant les produits deux à deux, on a

$$S^2 = \frac{\left[2\,AB.BC + \left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2\right)\right]\left[2\,AB.BC - \left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2\right)\right]}{16}$$

ou

$$S^2 = \frac{4\overline{AB}^2.\overline{BC}^2 - \left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2\right)^2}{16}.$$

Remarquant que les triangles OAB, OAC et OBC sont rectangles, et remplaçant $\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$ et $\overline{AC}^2$ par leurs valeurs, et effectuant, on a

$$S^2 = \frac{\overline{AO}^2.\overline{OC}^2 + \overline{AO}^2.\overline{OB}^2 + \overline{BO}^2.\overline{OC}^2}{4}.$$

Remplaçant cette valeur de S^2 dans l'égalité (1), il vient

$$\frac{1}{\overline{OM}^2} = \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2}:$$

or, on sait que cette dernière quantité est constante, donc OM est constant, et par suite le plan ABC enveloppe une sphère ayant O pour centre et OM pour rayon.

Un théorème analogue existe pour une courbe à centre et se démontre à peu près de la même manière.