Nouvelles annales de mathématiques

Painvin

Recherche des points multiples à l'infini dans les courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 145-156
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__145_0>

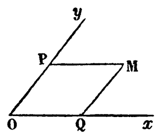
RECHERCHE DES POINTS MULTIPLES A L'INFINI DANS LES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. PAINVIN.

Remarques préliminaires.

I. — 1. COORDONNÉES HOMOGÈNES. — Soit un point M du plan rapporté aux axes Ox et Oy : nous représente-

FIG. 1.



rons les longueurs MP et MQ par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et nous dirons que (x, y, z) sont les *coordonnées homogènes* du point M. Pour un point donné, les quantités x, y, z sont indéterminées, les rapports seuls sont connus. On passera aux applications numériques en attribuant à z une valeur particulière, en faisant, par exemple, $z = 1$.

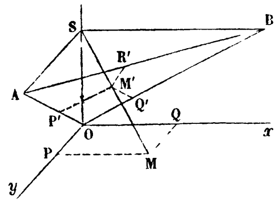
Une équation *homogène* en x, y, z, telle que

$$f(x, y, z) = 0,$$

représente une courbe parfaitement déterminée, puisque cette équation ne renferme en définitive que les rapports $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$.

Signification géométrique. — Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy dans le plan; faisons la perspective

Fig. 2.



de la courbe située dans le plan xOy, en prenant pour sommet de la perspective un point S situé sur la perpendiculaire OS au plan xOy, et en supposant que le plan sur lequel on fait la perspective passe par le point O.

Soient OA, OB, AB les intersections du plan de perspective par les plans SOy, SOx et par un plan passant par S et parallèle à xOy.

Soient encore A, B, C les angles respectifs du plan OAB avec les plans SOy, SOx, xOy. Si M est un point du plan xOy et que MP et MQ soient ses distances aux axes Oy et Ox; si M′ est la perspective de ce point sur le plan OAB, et que M′P′, M′Q′, M′R′ soient ses distances respectives aux droites OA, OB, AB, distances que nous désignerons par X, Y, Z, de sorte que

$$X = M'P', \quad Y = M'Q', \quad Z = M'R',$$

on trouve, sans difficulté, les relations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} MP &= h\,\frac{\sin A}{\sin C}\cdot\frac{X}{Z}, \\ MQ &= h\,\frac{\sin B}{\sin C}\cdot\frac{Y}{Z}. \end{aligned}\right.$$

h représentant la hauteur OS.

Mais x, y, z étant les coordonnées homogènes du point

M, on a par conséquent

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{z} = h\dfrac{\sin A}{\sin C}\cdot\dfrac{X}{Z} = \lambda\dfrac{X}{Z}, \\[2ex] \dfrac{y}{z} = h\dfrac{\sin B}{\sin C}\cdot\dfrac{Y}{Z} = \mu\dfrac{Y}{Z}. \end{cases}$$

On obtient des relations semblables en prenant des axes obliques; mais, pour l'objet que nous avons en vue, le cas où nous nous sommes placé est suffisant.

Ceci posé, soit l'équation d'une courbe dans le plan xOy

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0 \quad \text{ou} \quad f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = 0;$$

cette équation deviendra, par la substitution (1),

$$(3) \qquad f(\lambda X, \mu Y, Z) = 0.$$

Mais on peut disposer des constantes qui entrent dans λ et μ, et cela d'une infinité de manières, de façon que λ et μ soient égaux à l'unité; l'équation de la courbe deviendra alors

$$(4) \qquad f(X, Y, Z) = 0.$$

Nous voyons donc, en comparant les équations (2) et (4), que l'équation (2) peut être interprétée de deux manières différentes.

On peut regarder x, y, z comme les coordonnées homogènes d'un point du plan xOy, et l'équation (2) représente une courbe C située dans ce plan.

On peut aussi regarder x, y, z comme les distances d'un point du plan OAB (satisfaisant aux conditions indiquées) aux trois droites OB, OA et AB, et l'équation (2) représente la perspective C′ de la courbe C sur le plan OAB.

La courbe C est aussi la perspective, sur le plan xOy, de la courbe C'.

2. Droite a l'infini. — Soit l'équation d'une droite

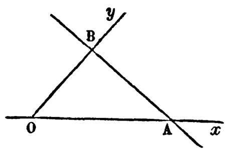
$$A\xi + B\eta + C = 0,$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$(5) \qquad Ax + By + Cz = 0.$$

Les distances à l'origine des points où cette droite ren-

Fig. 3.



contre les axes de coordonnées sont

$$-\frac{C}{A}, \quad -\frac{C}{B}.$$

Si l'on suppose que A et B tendent vers zéro, C étant différent de zéro, la droite AB s'éloigne à l'infini dans le plan; nous lui donnons alors le nom de *droite à l'infini;* dans ces hypothèses, l'équation (5) devient

$$Cz = 0 \quad \text{ou} \quad z = 0;$$

on doit donc regarder $z = 0$ comme *l'équation de la droite à l'infini.*

Si A et B tendent vers zéro et que leur rapport reste indéterminé, la droite à l'infini aura une direction indéterminée; ainsi l'équation

$$z = 0$$

représente, en général, une droite à l'infini de direction indéterminée.

Si A et B tendent vers zéro et que leur rapport reste fixe, la droite s'éloigne à l'infini en restant parallèle à une direction déterminée.

Signification géométrique. — Considérons la perspective sur le plan xOy de la courbe C′ située dans le plan AOB : la droite AB sera projetée à l'infini. Les relations (1) nous montrent encore qu'à un point situé sur la droite AB, pour lequel $Z = 0$, correspond un point pour lequel $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ sont infinis, ce qui conduit à

$$z = 0,$$

puisque x et y sont arbitraires.

Ainsi nous voyons encore que les projections des différents points de la droite, lesquelles projections sont à l'infini, satisfont à la relation

$$z = 0;$$

cette équation nous donne donc la droite à l'infini ou, en perspective, la droite AB.

Les particularités de la courbe C, qui se trouveront sur la ligne à l'infini, se reproduiront en perspective sur la ligne AB, et inversement, les particularités que la courbe C′ présentera sur la ligne AB se trouveront projetées sur la ligne à l'infini, lorsqu'on fera la perspective de C′ sur le plan xOy. Ce rapprochement me paraît plus que suffisant pour enlever à la conception de la droite à l'infini le vague qu'elle semble présenter au premier abord.

3. Imaginaires. — Il s'agit toujours d'imaginaires de la forme $(a + b\sqrt{-1})$. Nous appellerons *point imaginaire* un point dont les coordonnées sont imaginaires; *droite imaginaire,* une droite dont les coefficients sont

imaginaires, etc. Il ne faut attacher aucune idée de représentation géométrique à ces points, droites, etc., imaginaires; c'est une conception purement analytique, mais absolument indispensable si l'on veut abréger les énoncés et formuler des théorèmes généraux. Et, lorsqu'il s'agit des particularités d'une courbe, cette conception est d'autant plus nécessaire, que les points ou les droites ont une égale influence sur les modifications de la courbe, que ces points ou ces droites soient réels ou imaginaires. Ainsi, un point multiple a toujours la même influence sur la classe de la courbe, qu'il corresponde à des branches réelles ou à des branches imaginaires; une tangente multiple, qu'elle soit réelle ou qu'elle soit imaginaire, a toujours la même influence sur l'ordre de la courbe. Les points, droites, etc., imaginaires sont donc des conceptions purement analytiques, auxquelles il ne faut jamais vouloir donner une représentation géométrique, mais sans lesquelles la Géométrie n'aurait pas de théorèmes généraux; sans lesquelles il serait impossible de rattacher à des idées générales la raison des variétés de classes que présentent les courbes de même ordre, et inversement, etc. Dans cette étude, je ne ferai aucune différence pour les énoncés entre les points réels et imaginaires.

4. Points circulaires a l'infini. — Soit une circonférence quelconque

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$x^2 + y^2 + 2axz + 2byz + cz^2 = 0;$$

les intersections de cette circonférence avec la droite à l'infini sont données par les deux équations (indépendantes de a, b, c)

$$x^2 + y^2 = 0, \quad z = 0;$$

ces deux points imaginaires appartiennent à toutes les circonférences situées dans le plan : on les a appelés *points circulaires à l'infini;* je ne discute pas l'expression. On peut dire aussi qu'ils sont les intersections d'un cercle de rayon nul avec la droite à l'infini.

Les circonférences sont donc des courbes du second ordre ayant toutes *deux points communs*. Cette simple remarque suffit pour montrer l'importance des deux points imaginaires

$$x^2 + y^2 = 0, \quad z = 0,$$

sans parler du rôle qu'ils jouent dans l'étude générale des foyers.

5. Points multiples. — Je définirai comme il suit les points multiples. Un point multiple d'ordre p est un point tel, qu'une ligne *quelconque* passant par ce point y rencontre la courbe en p points coïncidents, et, par suite, ne rencontre plus la courbe qu'en $(n - p)$ autres points différents, si n est de l'ordre de la courbe.

Par un point multiple d'ordre p passent p branches (réelles ou imaginaires) de la courbe; les p tangentes proprement dites à ces branches au point multiple seront les droites qui, passant par ce point, y rencontrent la branche de courbe en $(p + 1)$ points; dans ce cas, les tangentes proprement dites auront un contact du premier ordre. Il pourra arriver que le contact de ces tangentes soit d'un ordre plus élevé, et cela aura lieu, si le nombre des points de rencontre est supérieur à $(p + 1)$.

II. — Abordons maintenant l'étude des points multiples à l'infini. Je mettrai l'équation de la courbe sous la forme

$$(1) \quad \varphi_n(x, y) + z\varphi_{n-1}(x, y) + z^2\varphi_{n-2}(x, y) + \ldots + z^n\varphi_0 = 0,$$

φ_i représentant une fonction homogène et de degré i des variables x et y.

Les points où la courbe est rencontrée par la droite à l'infini ($z = 0$) seront donnés par les équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{c} z = 0, \\ \varphi_n(x, y) = 0. \end{array} \right.$$

Soit

$$(3) \qquad \varphi_n(x, y) = (y - ax)(y - a_1 x)\ldots(y - a_{n-1} x),$$

nous avons ainsi n points situés sur la droite à l'infini et déterminés par les n droites que fournit la seconde des équations (2) ; nous appellerons *directions asymptotiques* les n droites passant par l'origine, et données par l'équation

$$(3 \ bis) \qquad \varphi_n(x, y) = (y - ax)(y - a_1 x)\ldots(y - a_{n-1} x) = 0.$$

§ Ier. — *Points simples à l'infini.*

III. — Considérons un des points à l'infini, par exemple le point

$$\mathrm{I} \left\{ \begin{array}{c} z = 0, \\ y - ax = 0, \end{array} \right.$$

et supposons que ce soit un *point simple*, c'est-à-dire que les fonctions

$$_y\varphi'_n(x, y), \quad \varphi_{n-1}(x, y)$$

n'admettent pas le diviseur $(y - ax)$, nous en verrons plus loin la raison. (Il ne faut pas oublier que cette hypothèse subsiste dans toute l'étendue du § Ier.)

Cherchons la tangente au point I, c'est-à-dire l'*asymptote* correspondant à ce point. Dans ce but, prenons une droite quelconque passant par le point I

$$(4) \qquad y - ax = \lambda z,$$

et exprimons que cette droite rencontre la courbe en deux points confondus avec le point I; c'est-à-dire que nous déterminerons λ par la condition que le premier membre de l'équation (1) est divisible par z^2.

Substituant dans l'équation (1) la valeur de y fournie par l'équation (4) et développant par la formule de Taylor, nous trouvons

$$(5)\quad \left.\begin{array}{l} x^n\varphi_n(1,a) + x^{n-1}\left[\lambda\varphi'_n(1,a) + \varphi_{n-1}(1,a)\right]z \\ + x^{n-2}\left[\dfrac{\lambda^2}{1.2}\varphi''_n(1,a) + \dfrac{\lambda}{1}\varphi'_{n-1}(1,a) + \varphi_{n-2}(1,a)\right]z^2 \\ + x^{n-3}\left[\dfrac{\lambda^3}{1.2.3}\varphi'''_n(1,a) + \dfrac{\lambda^2}{1.2}\varphi''_{n-1}(1,a) + \dfrac{\lambda}{1}\varphi'_{n-2}(1,a) \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \varphi_{n-3}(1,a)\right]z^3 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0;$$

les accents désignent ici les dérivées des fonctions φ_i par rapport à la variable y dans lesquelles on a remplacé x par 1 et y par a.

Or $\varphi_n(1,a)$ est nul; le premier membre de l'équation (5) sera donc divisible par z^2, c'est-à-dire la droite (4) sera asymptote, si nous prenons pour λ la valeur

$$(6)\qquad \lambda = -\frac{\varphi_{n-1}(1,a)}{\varphi'_n(1,a)}.$$

Ainsi les asymptotes sont parallèles aux directions asymptotiques; mais il peut arriver que l'asymptote se trouve transportée à l'infini, toujours parallèlement à la direction asymptotique correspondante.

IV. — Discussion de la valeur de λ.

$$1^{\circ}\qquad \varphi_{n-1}(1,a) = 0,\quad \varphi'_n(1,a) \gtrless 0;$$

alors $\lambda = 0$, c'est-à-dire que l'asymptote coïncide avec la droite $(y - ax = 0)$; dans ce cas, l'équation de la courbe se présente sous la forme

$$(y - ax)\, u_{n-1} + (y - ax)\, u_{n-2}\, z + z^2 \varphi_{n-2} + z^3 \varphi_{n-3} + \ldots = 0,$$

les u_i désignant, comme les φ_i, des fonctions homogènes de x et y.

2° $$\varphi'_n(1, a) = 0, \quad \varphi_{n-1}(1, a) \gtrless 0;$$

alors $\lambda = \infty$, c'est-à-dire que l'asymptote se trouve transportée à l'infini parallèlement à la direction asymptotique correspondante, car l'équation (4) donne $z = 0$; dans ce cas, l'équation de la courbe a la forme

$$(y - ax)^2 u_{n-2} + z\varphi_{n-1} + z^2 \varphi_{n-2} + \ldots = 0.$$

La parabole nous offre un exemple de ce cas particulier.

Si les deux termes de la valeur de λ étaient nuls à la fois, on aurait un point double; nous n'avons pas à nous en occuper pour le moment. Mais il nous reste à faire plusieurs remarques importantes.

V. — *Remarques.*

1. Il peut arriver que pour la valeur particulière a et la valeur correspondante λ, le coefficient de z^2 [équation (5)] s'annule; le point à l'infini serait alors un *point d'inflexion,* et la droite (4) serait la tangente d'inflexion. Ce n'est pas en effet un point double, car une droite *quelconque* passant par le point I ne rencontre pas la courbe en deux points coïncidents, puisqu'on suppose que $\varphi'_n(1, a)$ et $\varphi_{n-1}(1, a)$ ne sont pas nuls à la fois.

Le contact de l'asymptote serait d'un ordre plus élevé, si les valeurs de a et λ annulaient les coefficients de z^2, z^3, z^4,... (nous nous supposons toujours dans le cas d'un point simple).

2. Lorsque l'équation de la courbe se présente sous la

forme

(7) $$(y - ax)^p u_{n-p} + z\varphi_{n-1} + z^2 \varphi_{n-2} + \ldots = 0,$$

φ_{n-1} n'admettant pas le facteur $(y - ax)$, la droite à l'infini a un contact du $(p - 1)^{ième}$ ordre au point à l'infini

$$\begin{cases} z = 0, \\ y - ax = 0. \end{cases}$$

En effet, si de l'équation (4) nous tirons la valeur de y pour la substituer dans l'équation (7), il vient

(8) $$\lambda^p z^p u_{n-p}(x, ax + \lambda z) + zx^{n-1} \varphi_{n-1}(1, a) + z^2 x^{n-2}[\lambda\varphi'_{n-1}(1, a) + \varphi_{n-2}(1, a)] + \ldots = 0.$$

Nous voyons d'abord que le point I n'est pas un point multiple; car une droite quelconque, passant par ce point, n'y rencontre la courbe qu'en un seul point, puisque $\varphi_{n-1}(1, a)$ n'est pas nul d'après notre hypothèse.

En second lieu, la droite (4) ne peut être tangente, c'est-à-dire que le terme en z [équation (8)] ne peut disparaître à moins que λ ne soit infini; donc l'asymptote se trouve transportée à l'infini parallèlement à la direction asymptotique $y - ax = 0$.

Enfin, cette droite à l'infini a avec la courbe, au point I, un contact du $(p - 1)^{ième}$ ordre; car si, dans l'équation (7), on fait $z = 0$, on trouve

$$(y - ax)^p u_{n-p} = 0;$$

cette droite rencontre donc la courbe en p points confondus avec le point I. On peut encore constater plus facilement ces propriétés en posant

$$z = \mu(y - ax)$$

et en remplaçant z par cette valeur dans l'équation (7).

En particulier, si l'équation de la courbe est de la forme

$$(y - ax)^3 u_{n-3} + z\varphi_{n-1} + z^2 \varphi_{n-2} + z^3 \varphi_{n-3} + \ldots = 0,$$

le point à l'infini ($z = 0$, $y - ax = 0$) sera un point d'inflexion ayant pour tangente la droite à l'infini.

Si l'équation de la courbe est de la forme, par exemple,

$$(y - ax)^2 (y - a_1 x)^2 (y - a_2 x)^2 u_{n-6} + z\varphi_{n-1} + z^2 \varphi_{n-2} + \ldots = 0,$$

φ_{n-1} ne contenant aucun des facteurs binômes qui entrent au carré dans $\varphi_n(x, y)$, la droite à l'infini sera une *tangente triple*.

3. Lorsque les coefficients angulaires de deux directions asymptotiques sont $\pm \sqrt{-1}$, l'équation a la forme

$$(x^2 + y^2) u_{n-2} + z\varphi_{n-1} + z^2 \varphi_{n-2} + \ldots = 0,$$

et la courbe passe par les deux points circulaires à l'infini.

4. Le mode de recherche qui vient d'être exposé est complétement indépendant de la forme particulière ($y - ax$) que j'ai choisie pour définir la direction asymptotique. Lorsque la direction asymptotique est l'axe des x ou l'axe des y, la droite passant par le point correspondant à l'infini aura pour équation

$$y - \lambda z = 0 \quad \text{ou} \quad x - \lambda z = 0,$$

et le calcul indiqué dans le n° III devient alors beaucoup plus simple.

(*La suite prochainement.*)