DE VIRIEU

Démonstration de la seconde égalité de la question 681

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 143-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__143_1>

DÉMONSTRATION
DE LA SECONDE ÉGALITÉ DE LA QUESTION 681;

PAR M. DE VIRIEU.

Considérons les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &x\cos a + y\cos b + z\cos c = \mathrm{M},\\ &x\,\text{séc}\,a + y\,\text{séc}\,b + z\,\text{séc}\,c = \mathrm{N},\\ &x\,\text{coséc}\,a + y\,\text{coséc}\,b + z\,\text{coséc}\,c = \mathrm{P};\end{aligned}\right.$$

ajoutons ces équations après les avoir multipliées respectivement par 1, $\cos a \cos b \cos c$, $-\sin a \sin b \sin c$. Nous aurons

$$\begin{aligned}[\cos a + \cos(b+c)]x + [\cos b + \cos(a+c)]y \\ + [\cos c + \cos(a+b)]z \\ = \mathrm{M} + \mathrm{N}\cos a \cos b \cos c - \mathrm{P}\sin a \sin b \sin c,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}2\cos\frac{a+b+c}{2} \\ \times\left[x\cos\frac{c+b-a}{2} + y\cos\frac{a+c-b}{2} + z\cos\left(\frac{a+b-c}{2}\right)2\right] \\ = \mathrm{M} + \mathrm{N}\cos a \cos b \cos c - \mathrm{P}\sin a \sin b \sin c,\end{aligned}$$

équation dont le premier membre est nul indépendamment des valeurs de x, y, z si l'on a

$$a + b + c = (2k+1)\pi,$$

k étant un nombre entier. Dans cette hypothèse, le système (1) est impossible ou indéterminé, et le déterminant des coefficients des inconnues est nul. C. Q. F. D.

Note. — Une erreur de calcul rend illusoire la démonstration de la page 73. L'égalité (2), p. 72, a lieu pour des angles dont la somme est égale à $(2k+1)\pi$, comme vient de le démontrer M. de Virieu, et aussi quand deux quelconques des angles sont égaux, quel que soit le troisième; mais il est facile de s'assurer, par des substitutions particulières, qu'elle n'a pas lieu pour des valeurs quelconques de a, b, c.