

Remarques sur la transformation et l'abaissement des équations

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 3
(1864), p. 122-127

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__122_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REMARQUES SUR LA TRANSFORMATION ET L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS.

1. Soit

$$(1) \quad f(x) = 0$$

une équation algébrique du $m^{\text{ième}}$ degré. Posons

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x),$$

$\varphi_0(x)$ désignant la somme de tous les termes de degré pair, et $\varphi_1(x)$ la somme de tous les termes de degré im-

pair. On aura

$$(2) \quad \varphi_0(-x) = \varphi_0(x) \quad \text{et} \quad \varphi_1(-x) = -\varphi_1(x).$$

Supposons que l'équation (1) admette deux racines égales et de signes contraires $+a$ et $-a$, et, ce qui revient au même, que son premier membre soit divisible par $x^2 - a^2$. On aura identiquement

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_0(a) + \varphi_1(a) = 0, \\ \varphi_0(-a) + \varphi_1(-a) = 0, \end{cases}$$

ou, à cause des équations (2),

$$(4) \quad \varphi_0(a) - \varphi_1(a) = 0.$$

On tire des identités (2) et (3)

$$\varphi_0(a) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_1(a) = 0;$$

d'où l'on conclut que les équations

$$(5) \quad \varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_1(x) = 0$$

ont une racine commune. Par conséquent, *pour qu'une équation admette deux racines égales et de signes contraires, il faut et il suffit qu'il existe une racine commune aux deux équations que l'on obtient en égalant à 0 d'abord l'ensemble des termes de degré pair, puis l'ensemble des termes de degré impair.*

La recherche des racines communes aux équations (4) est susceptible de simplification. Il faudra d'abord diviser $\varphi_1(x)$ par x , et comme les polynômes $\varphi_0(x)$ et $\frac{\varphi_1(x)}{x}$ n'ont que des termes de degré pair, en posant $x^2 = z$ on diminuera de moitié leur degré.

2. Posons

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x);$$

la lettre φ , affectée de l'indice 0, 1 ou 2 servant à désigner actuellement l'ensemble de tous les termes dans lesquels l'exposant de x , divisé par 3, donne le même

reste 0, 1 ou 2. Si α et α^2 sont les racines cubiques imaginaires de l'unité, on aura évidemment

$$(6) \begin{cases} \varphi_0(\alpha x) = \varphi_0(x), & \varphi_1(\alpha x) = \alpha \varphi_1(x), & \varphi_2(\alpha x) = \alpha^2 \varphi_2(x), \\ \varphi_0(\alpha^2 x) = \varphi_0(x), & \varphi_1(\alpha^2 x) = \alpha^2 \varphi_1(x), & \varphi_2(\alpha^2 x) = \alpha \varphi_2(x). \end{cases}$$

Supposons maintenant que le premier membre de l'équation (1) soit divisible par $x^3 - a^3$. On aura, en ayant égard aux équations (6),

$$\begin{aligned} \varphi_0(a) + \varphi_1(a) + \varphi_2(a) &= 0, \\ \varphi_0(a) + \alpha \varphi_1(a) + \alpha^2 \varphi_2(a) &= 0, \\ \varphi_0(a) + \alpha^2 \varphi_1(a) + \alpha \varphi_2(a) &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\varphi_0(a) = 0, \quad \varphi_1(a) = 0, \quad \varphi_2(a) = 0,$$

en sorte que les équations

$$(7) \quad \varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0$$

auront une racine commune a (et même trois; puisque αa et $\alpha^2 a$ y satisfont également).

D'ailleurs, tous les termes de la seconde sont divisibles par x , et tous ceux de la troisième par x^2 . Lorsque ces facteurs communs auront été enlevés, les équations (7) s'abaisseront à un degré trois fois moindre en faisant $x^3 = z$.

Ces propriétés, et d'autres analogues, ont été données par Lambert dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1763. Elles ont de nombreuses conséquences qui ne paraissent pas avoir été suffisamment remarquées.

3. Supposons que deux racines de a et b de l'équation (1) aient une somme connue $2s$. L'équation $f(x+s) = 0$ aura deux racines égales et de signes contraires qu'on trouvera par la règle du n° 1, et l'on aura à effectuer une élimination bien moins laborieuse qu'en suivant la méthode indiquée dans la plupart des *Traité d'Algèbre*.

4. Quand l'équation $f(x) = 0$ est de degré pair, et que toutes ses racines se partagent en couples donnant une somme $2s$, l'équation $f(x+s) = 0$ a ses racines égales deux à deux et de signes contraires. Par suite, pour savoir si une équation jouit de cette propriété (et en particulier si elle a ses racines en progression arithmétique), il faudra faire disparaître le second terme. Alors tous les termes de rang pair devront disparaître.

Si l'équation $f(x)$, de degré impair, a une racine égale à s , et toutes les autres donnant deux à deux la somme $2s$, l'équation $f(x+s) = 0$ aura, dans ce cas, une racine nulle, et toutes les autres seront deux à deux égales et de signes contraires. L'équation $f(x+s) = 0$ n'aura donc que des termes de degré impair.

5. Si l'équation $f(x) = 0$, de degré pair ou impair, est telle que ses racines groupées deux à deux donnent la même somme $2s$ (avec une racine unique égale à s , dans le cas où le degré est impair), l'équation $f(x+s) = 0$ n'aura que des termes de même parité; il en sera de même des équations $f'(x+s) = 0$, $f''(x+s) = 0, \dots$ qui auront alternativement ou toutes leurs racines égales deux à deux et de signes contraires, ou bien une racine nulle et toutes leurs autres racines égales et de signes contraires.

De là résulte ce théorème :

Si les racines de l'équation de degré pair

$$f(x) = 0$$

peuvent se partager en couples donnant une somme $2s$, les racines des équations

$$f''(x) = 0, \quad f^{iv}(x) = 0, \quad f^{vi}(x) = 0, \text{ etc.}$$

jouiront de la même propriété, et il en sera de même (la racine s mise à part) pour les racines des équations

$$f'(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \quad f^v(x) = 0, \dots$$

Ce théorème et un autre, analogue pour les équations de degré impair, ont été proposés par nous comme exercice dans les *Nouvelles Annales* (question 392, t. XVI, p. 311) et démontrés t. XVII, p. 157.

6. Proposons-nous de trouver l'équation dont les racines sont les moyennes arithmétiques des racines d'une équation proposée, prises deux à deux.

Si $2s$ représente la somme de deux racines de l'équation $f(x) = 0$, l'équation $f(x+s) = 0$ aura deux racines égales et de signes contraires. Il suffira donc d'exprimer que l'ensemble des termes de degré pair de $f(x+s)$ et l'ensemble des termes de degré impair s'annulent pour la même valeur de x : l'opération reviendra à éliminer x^2 entre les équations obtenues quand on égalera à zéro la première somme, et la seconde divisée par x .

Exemples. — 1° Soit

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 = 0$$

l'équation proposée : posons

$$f(x+s) = S_0 + S_1x + S_2x^2 + S_3x^3 + S_4x^4 = 0,$$

S_0, S_1, S_2 , etc., désignant $f(s), f'(s), \frac{f''(s)}{1.2}$, etc.; il faudra éliminer x^2 entre les équations

$$S_0 + S_2x^2 + S_4x^4 = 0,$$

$$S_1 + S_3x^2 = 0,$$

ce qui donne

$$S_0 - \frac{S_1S_2}{S_3} + \frac{S_1^2S_4}{S_3^2} = 0,$$

ou

$$S_0S_3^2 - S_1S_2S_3 + S_1^2S_4 = 0.$$

Pour le cinquième degré, on trouvera

$$(S_0S_3 - S_1S_2)(S_2S_5 - S_3S_4) - (S_0S_5 - S_1S_4)^2 = 0,$$

et, pour le sixième degré,

$$[(S_1S_4 - S_0S_5)S_1 - (S_1S_2 - S_0S_3)] [(S_1S_0 - S_0S_5)S_5 - S_1S_3S_6] \\ + [(S_1S_2 - S_0S_3)S_5 - S_1^2S_0]^2 = 0.$$

7. Ce qui précède conduit au théorème que j'ai donné sans démonstration dans les *Nouvelles Annales* (t. XVIII, p. 257), et dont je rétablis ici l'énoncé légèrement modifié :

Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique ; soient $\varphi_0(x)$ l'ensemble des termes de degré pair, et $\varphi_1(x)$ l'ensemble des termes de degré impair du développement de $f(x + s)$. Soit $\psi(s)$ le reste indépendant de x^2 , mais fonction de s , qu'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur entre $\varphi_0(x)$ et $\frac{\varphi_1(x)}{x}$. L'équation $f(x) = 0$ aura autant de diviseurs commensurables du second degré qu'il y aura de valeurs commensurables de s satisfaisant à l'équation $\psi(s) = 0$.

(Sera continué.)

P.