Faure

Sur l'équation du troisième degré et sur une équation du dixième degré de Jacobi

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 116-121

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__116_1>

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ
ET SUR UNE ÉQUATION DU DIXIÈME DEGRÉ DE JACOBI;

PAR M. FAURE.

L'équation générale

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

s'identifie avec

$$(1) \qquad \alpha_1(x-\alpha)^3 + \beta_1(x-\beta)^3 = 0,$$

au moyen des valeurs

$$\alpha_1 = \frac{a\beta + b}{\beta - \alpha}, \qquad \beta_1 = \frac{-a\alpha - b}{\beta - \alpha},$$

et prenant pour α et β les racines de l'équation du second degré

$$(2) \qquad Ay^2 + 2By + C = 0,$$

où j'ai posé

$$A = ac - b^2, \quad 2B = ad - bc, \quad C = bd - c^2.$$

Or, l'équation (1) donne, en désignant par ρ l'une des racines cubiques de l'unité,

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta} = \rho\sqrt[3]{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}} = \rho\sqrt[3]{\frac{a\alpha + b}{a\beta + b}},$$

et l'on peut considérer l'équation donnée comme résolue. Si l'on veut donner à cette valeur la forme ordinaire, on en déduit d'abord

$$(3) \qquad x = \frac{\rho\beta(a\alpha + b)^{\frac{1}{3}} - \alpha(a\beta + b)^{\frac{1}{3}}}{\rho(a\alpha + b)^{\frac{1}{3}} - (a\beta + b)^{\frac{1}{3}}};$$

mais on peut écrire

$$ax = -b + \frac{\rho(a\beta + b)(a\alpha + b)^{\frac{1}{3}} - (a\alpha + b)(a\beta + b)^{\frac{1}{3}}}{\rho(a\alpha + b)^{\frac{1}{3}} - (a\beta + b)^{\frac{1}{3}}},$$

la division se fait exactement, on a de plus :

$$(a\alpha + b)(a\beta + b) = -A,$$

donc

$$x = \frac{1}{a}\left\{ -b + \rho[A(a\alpha + b)]^{\frac{1}{3}} + \rho^2[A(a\beta + b)]^{\frac{1}{3}} \right\},$$

formule qui donne les trois racines puisque ρ indique l'une quelconque des racines cubiques de l'unité.

M. Le Besgue, dans un article inséré dans le tome VIII, p. 219, arrive aussi à cette formule, mais, comme il le dit, au moyen de réductions assez longues. La méthode précédente ne laisse rien à désirer sous le rapport de la simplicité.

La résolvante (2) et l'équation donnée ont entre elles des relations très-remarquables, indiquées aussi par M. Le Besgue.

1° Si $A = B = C = 0$, auquel cas la résolvante devient identique, l'équation donnée a ses trois racines égales à $-\frac{b}{a}$.

2° Si $AC - B^2 = 0$, auquel cas la résolvante a deux racines égales, l'équation admet la racine double $-\frac{B}{A}$ et la racine simple $-\frac{Ad}{Ca}$. Cela se voit en considérant l'équation (3).

3° Si $A = 0$, ou si $C = 0$, l'équation se réduit à une équation à deux termes. Elle se met en effet sous les deux formes

$$a\left(x+\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{ad-bc}{a} = 0,$$

$$\frac{ac-b^2}{c}x^3 + \frac{b^2}{c}\left(x+\frac{c}{b}\right)^3 = 0.$$

De là concluons que si la résolvante a une racine infinie ou une racine nulle, l'équation donnée se réduira à une équation à deux termes.

Que deviennent les racines de l'équation du troisième degré lorsque le coefficient a du premier terme est nul?

En faisant sur la formule qui exprime la valeur de x des transformations bien simples, on arrive à la relation (3) qui pour $a = 0$ donne

$$x = \frac{\rho\beta b^{\frac{1}{3}} - \alpha b^{\frac{1}{3}}}{\rho b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} = \frac{\rho\beta - \alpha}{\rho - 1};$$

pour $\rho = 1$ elle donne l'infini, mais si l'on prend pour ρ des valeurs imaginaires, on trouve

$$x = \frac{-3c \pm \sqrt{4bd - 3c^2}\sqrt{-3}}{6b}.$$

Cette solution exprime les racines de l'équation du second degré

$$3bx^2 + 3cx + d = 0.$$

Remarque I. — Si l'on applique cette méthode à une équation de degré plus élevé, par exemple à celle du cinquième degré, on voit que l'équation générale

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0$$

s'identifie avec l'équation (1) moyennant les relations

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Les valeurs de α et β sont toujours données par l'équation (2), et l'on trouve

$$x = \frac{1}{a}\left(-b - (b^2 - ac)^{\frac{1}{5}}\left\{(a\alpha + b)^{\frac{3}{5}} + (a\beta + b)^{\frac{3}{5}} + (b^2 - ac)^{\frac{1}{5}}\left[(a\alpha + b)^{\frac{1}{5}} + (a\beta + b)^{\frac{1}{5}}\right]\right\}\right).$$

Remarque II. — La solution précédente de l'équation du troisième degré indique immédiatement une relation entre deux des racines de l'équation. Soit x la racine qui correspond à $\rho = 1$, x_1 celle qui correspond à une des valeurs imaginaires de cette quantité, on a :

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta}=\sqrt[3]{\frac{a\alpha+b}{a\beta+b}},\quad \frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta}=\rho\sqrt[3]{\frac{a\alpha+b}{a\beta+b}};$$

donc

$$\frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta}=\rho\,\frac{x-\alpha}{x-\beta}.$$

Remplaçant ρ, α, β par leurs valeurs, on a une relation que l'on trouve d'habitude assez péniblement, même en supposant l'équation du troisième degré débarrassée de son second terme. (*Voyez* l'article de M. Lobatto inséré dans le tome IX du *Journal de M. Liouville*, ou l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.)

Résolution de l'équation du dixième degré de Jacobi.

Soit l'équation

$$y^{10}-5qy^8-5q^4y^2+q^5=py^5;$$

je la mets sous la forme

$$(1)\qquad y^5+\frac{q^5}{y^5}-5q\left(y^3+\frac{q^3}{y^3}\right)=p,$$

puis posant

$$(2)\qquad y+\frac{q}{y}=x,$$

d'où

$$y^3+\frac{q^3}{y^3}=x^3-3qx,\quad y^5+\frac{q^5}{y^5}=x^5-5qx^3+5q^2x,$$

l'équation (1) devient

$$x^5-10qx^3+20q^2x=p.$$

Pour résoudre celle-ci, on pose

$$2q=m.n,\qquad p=m^5+n^5:$$

cela donne

$$m^5 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 128 q^5}}{2}, \qquad n^5 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 128 q^5}}{2},$$

et l'on a

$$x^5 - 5 mnx^3 + 5 m^2 n^2 x = m^5 + n^5,$$

laquelle est vérifiée par

$$x = m + n.$$

Or l'on a, d'après l'équation (2),

$$2y = x \pm \sqrt{x^2 - 4q};$$

donc

$$2y = m + n \pm \sqrt{m^2 + n^2},$$

car

$$2mn = 4q.$$

Remplaçant m et n par leurs valeurs, on a la solution de Jacobi :

$$x = \left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 128 q^5}}{2}\right)^{\frac{1}{5}} + \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 128 q^5}}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 128 q^5}}{2}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 128 q^5}}{2}\right)^{\frac{2}{5}}}.$$