

MOGNI

Solution de la question 576

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 61-63

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__61_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 576 ;

PAR M. MOGNI,
Professeur à Tortone.

Soient C le centre, F, F₁ les foyers et P un point quelconque d'une ellipse de Cassini; qu'on décrive un cercle passant par F, F₁ et P, et supposons que la normale à la courbe au point P rencontre ce cercle en un second point N : alors on aura cette relation

$$CP \times PN = \text{constante.}$$

Posons $PF = f$, $PF_1 = f_1$, l'équation de la *cassinienne*, exprimée au moyen des distances f , f_1 , sera $f.f_1 = a$, a étant une constante.

Différentiant cette équation, on obtient

$$f.df + f_1.df = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{df}{df_1} = -\frac{f}{f_1}.$$

On déduit immédiatement de cette relation que :

1° La tangente au point P de la courbe divise l'angle formé par l'un des rayons vecteurs avec le prolongement de l'autre en deux parties dont les cosinus sont entre eux comme les rayons vecteurs contigus.

2° Conséquemment, la normale au point P de la courbe divise l'angle des rayons vecteurs en parties dont les sinus sont entre eux comme les rayons vecteurs contigus. On aura donc

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\sin \angle NPF}{\sin \angle NPF_1}.$$

Dans le triangle FPF₁, la droite PC qui unit le sommet P au milieu C du côté opposé, divise l'angle FPF₁ en deux parties dont les sinus sont inversement proportionnels aux côtés adjacents; donc

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\sin \angle CPF_1}{\sin \angle CPF}.$$

On déduit de ce qui précède

$$(1) \quad \widehat{NPF} = \widehat{CPF_1}, \quad \widehat{NPF_1} = \widehat{CPF}.$$

Menons NF, NF₁ et posons

$$NF = h, \quad NF_1 = k, \quad FF_1 = 2c, \quad PN = n, \quad PC = m,$$

et soit R le rayon du cercle circonscrit.

Par une propriété du quadrilatère inscrit, on a

$$(2) \quad f.h + f_1.k = 2c.n.$$

Mais on a

$$\sin \text{NPF} = \frac{h}{2R},$$

et dans le triangle $F_1 \text{ PC}$

$$\sin F_1 \text{ PC} = \frac{c}{m} \sin FF_1 \text{ P} = \frac{c}{m} \cdot \frac{f}{2R} = \frac{cf}{2Rm}.$$

En ayant égard aux relations (1), on obtient

$$\frac{h}{2R} = \frac{c \cdot f}{2Rm} \quad \text{d'où} \quad h = \frac{cf}{m}.$$

En opérant semblablement par rapport à k , on trouve

$$k = \frac{cf_1}{m}.$$

Substituant dans l'équation (2) les valeurs de h et k ainsi obtenues, et réduisant, on trouve la relation cherchée

$$f \cdot f_1 = m \cdot n = a.$$

C. Q. F. D.