

HENRI MARTIN

**Note sur l'emploi des imaginaires dans
la recherche des fonctions primitives de
quelques fonctions dérivées**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 57-60

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_57_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur l'emploi des imaginaires dans la recherche des fonctions primitives
de quelques fonctions dérivées ;

PAR M. HENRI MARTIN,

Élève en mathématiques spéciales (institution Barbet).

Exemple I^{er}. — Considérons la fonction dérivée

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On a $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x\sqrt{-1})^2}}$. Mais $\frac{1}{\sqrt{1-(x\sqrt{-1})^2}}$ est

le produit de $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ par la dérivée de $\arcsin(x\sqrt{-1})$. Donc

la fonction primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est représentée par

$$\frac{\arcsin(x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} + C.$$

La question est donc ramenée à évaluer cette dernière fonction.

Or, de la formule d'Euler :

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1} \cdot \sin y,$$

on tire :

$$y = \frac{L(\cos y + \sqrt{-1} \sin y)}{\sqrt{-1}},$$

et, en posant

$$\sin y = x \sqrt{-1},$$

il vient

$$\arcsin x \sqrt{-1} = \frac{L(\sqrt{1+x^2} - x)}{\sqrt{-1}},$$

d'où

$$\frac{\arcsin x \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = -L(\sqrt{1+x^2} - x) = L(\sqrt{1+x^2} + x).$$

Par conséquent la fonction primitive cherchée est

$$L(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

Exemple II. — Soit $\sqrt{1+x^2}$ la dérivée proposée.

En remplaçant x par $x\sqrt{-1}$, elle devient $\sqrt{1-x^2}$, expression de l'ordonnée correspondante à l'abscisse x dans le cercle $y^2 + x^2 = 1$. Il en résulte que $\sqrt{1-x^2}$ est la dérivée du segment de cercle compris entre l'axe des y et l'ordonnée correspondante à l'abscisse x , segment qui est égal à

$$\frac{1}{2} (x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x).$$

D'où il suit que $\sqrt{1+x^2}$ est la dérivée de

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{-1}} (x \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1+x^2} + \arcsin x \sqrt{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{1+x^2} + \frac{\arcsin x \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \right). \end{aligned}$$

Mais

$$\frac{\arcsin(x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} = L(x + \sqrt{1+x^2}), \quad (\text{Ex. 1}^{\text{re}}.)$$

donc la fonction primitive de $\sqrt{1+x^2}$ est

$$\frac{1}{2} [x\sqrt{1+x^2} + L(x + \sqrt{1+x^2})] + C.$$

Exemple III. — Considérons la fonction dérivée $L(1+x^2)$.

On a

$$\begin{aligned} L(1+x^2) &= L(1+x\sqrt{-1})(1-x\sqrt{-1}) \\ &= L(1+x\sqrt{-1}) + L(1-x\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

Or, la fonction primitive de $[Lf(x)]f'(x)$ est, comme on sait, $f(x) \cdot Lf(x) - f(x) + C$; donc, en négligeant les constantes, la fonction primitive de

$$L(1+x\sqrt{-1}) + L(1-x\sqrt{-1})$$

sera

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{-1}} [(1+x\sqrt{-1}) \cdot L(1+x\sqrt{-1}) - x\sqrt{-1} \\ &- (1-x\sqrt{-1}) \cdot L(1-x\sqrt{-1}) - x\sqrt{-1}], \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{-1}} [L(1+x\sqrt{-1}) - L(1-x\sqrt{-1})] \\ &+ x [L(1+x\sqrt{-1}) + L(1-x\sqrt{-1})] - 2x. \end{aligned}$$

Si nous remplaçons $L(1+x\sqrt{-1})$, $L(1-x\sqrt{-1})$, par leurs expressions connues :

$$\begin{aligned} &L(\sqrt{1+x^2}) + \sqrt{-1} \arctan x, \\ &L(\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{-1} \arctan x, \end{aligned}$$

la fonction obtenue devient

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} (2 \sqrt{-1} \operatorname{arc} \operatorname{tang} x) + x (2 \cdot \operatorname{L} \sqrt{1+x^2}) - 2x,$$

ou

$$2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tang} x + x \cdot \operatorname{L} (1+x^2) - 2x + C,$$

qui est la fonction primitive cherchée.
