

M. LAQUIÈRE

Solutions géométriques de quelques questions des Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2 (1863), p. 547-550

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_547_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_547_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

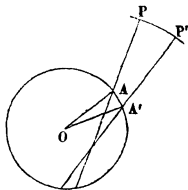
L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PAR M. M. LAQUIÈRE,
Lieutenant d'artillerie.

La développante de cercle est la trajectoire du pôle d'une spirale logarithmique roulant sur un cercle.



Soit A le point de contact de la spirale dont le pôle

est en P sur le cercle qui a pour centre O. L'angle du rayon vecteur de la spirale PA avec sa normale OA étant constant pour tous les points de la courbe, il en résulte que la droite PA fait un angle constant avec le rayon du point où elle coupe le cercle O. Elle enveloppe donc un cercle.

C. Q. F. D.

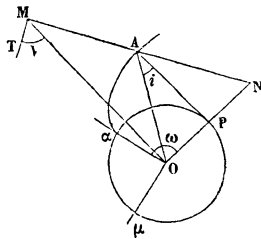
Si R est le rayon du cercle enveloppe de la spirale et a la base de celle-ci ($\rho = a^{\omega}$), la trajectoire du pôle aura pour développée un cercle de centre O et dont le rayon r est égal à

$$r = \frac{R}{\sqrt{1 + (\log nep a)^2}}.$$

Question 659. (HATON.)

La caustique par réflexion de la développante de cercle, le point lumineux étant au centre, est une développée de spirale d'Archimède.

Soient OA le rayon incident, AP la normale en A à



la développante; N le point symétrique du centre par rapport à AP : la droite NA est le rayon réfléchi.

Par le centre je mène OM parallèle à AP ; on aura

$$OM = 2AP = 2R\omega.$$

Le point M décrit une spirale d'Archimède dont le rayon initial est perpendiculaire à celui de la développ-

pante. De plus MN est normale à la courbe en M; car elle joint le point décrivant M à un point pris sur la perpendiculaire au rayon vecteur à une distance du pôle égale à la longueur constante $2R$ de la sous-normale. Ce qui démontre le théorème énoncé.

Question 660. (HATON.)

La courbe réciproque de la développante de cercle pour les rayons vecteurs émanés du centre est une spirale tractrice.

En effet, dans deux courbes réciproques la tangente en un point de l'une d'elles et la normale au point correspondant de l'autre font des angles complémentaires avec le rayon vecteur. Si No est la distance du pôle à la normale à l'une des courbes, T' la longueur de la tangente à l'autre, on aura dans deux triangles rectangles semblables

$$\frac{\rho}{No} = \frac{T'}{\rho'},$$

et, de même,

$$\frac{Sn}{\rho} = \frac{\rho'}{St},$$

St , Sn représentant la sous-tangente et la sous-normale; d'où

$$\rho^2 = \rho\rho' = No \cdot T' = Sn \cdot St.$$

Ainsi la courbe dont les rayons vecteurs sont réciproques de ceux de la développante de cercle ($No = \text{const.}$) est la spirale tractrice ($T' = \text{const.}$).

La courbe réciproque de la spirale d'Archimède ($Sn = \text{const.}$) est la spirale hyperbolique ($St = \text{const.}$).

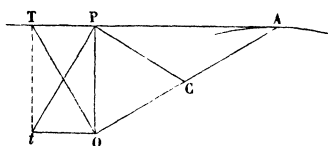
Question 661. (HATON.)

Le lieu du pôle d'une spirale hyperbolique roulant

sur elle-même en partant de la coïncidence des pôles est une spirale tractrice.

Il est évident que cette courbe n'est autre que la podaire du pôle de la spirale amplifiée au double. Il suffit donc d'étudier la podaire de la spirale hyperbolique.

Soient AT la tangente à une courbe, O le pôle, P sa pro-



jection sur la tangente; C étant pris au milieu de OA, PC sera la normale à la podaire. Soient OT la sous-tangente à la première courbe, Ot à sa podaire. Les angles en P et en O étant droits et les angles TOP, tPO égaux, la figure OPTt est un rectangle; par suite $OT = Pt$; ainsi la tangente à la podaire d'une courbe est égale à la sous-tangente de celle-ci.

La spirale hyperbolique définie par une sous-tangente constante a donc pour podaire une spirale tractrice dont la tangente est constante.