

JOHN GRIFFITHS

Sur les équations de quelques cercles

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 543-547

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__543_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ÉQUATIONS DE QUELQUES CERCLES;

PAR M. JOHN GRIFFITHS,
Jesus college, Oxford.

Soit ABC un triangle dont les côtés BC, CA, AB sont représentés par les équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Désignons par $A_1 B_1 C_1; A_2 B_2 C_2; \dots A_n B_n C_n$, une série de triangles, dont les sommets $A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; \dots A_n, B_n, C_n$, sont les milieux des côtés BC, CA, AB; $B_1 C_1, C_1 A_1, A_1 B_1; \dots B_{n-1} C_{n-1}, C_{n-1} A_{n-1}, A_{n-1} B_{n-1}$, respectivement : trouver l'équation en α, β, γ du cercle des neuf points passant par A_n, B_n, C_n .

Pour obtenir l'équation cherchée, il faut d'abord trouver les équations des droites $B_n C_n, C_n A_n, A_n B_n$.

Si a, b, c désignent les côtés opposés aux sommets A, B, C; et p, q, r les perpendiculaires abaissées de ces sommets

sur une droite quelconque, l'équation de cette droite sera

$$(1) \quad pa\alpha + qb\beta + rc\gamma = 0.$$

Or, en représentant par $p_a, p_1, p_2, \dots, p_n$ les longueurs des perpendiculaires abaissées du sommet A sur les droites BC, $B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_nC_n$, on a

$$\begin{aligned} p_a &= p_a, \\ p_1 &= \frac{1}{2} p_a, \\ p_2 &= \frac{1}{2} (p_1 + p_a), \\ &\dots\dots\dots \\ p_n &= \frac{1}{2} (p_{n-1} + p_{n-2}), \end{aligned}$$

d'où, par l'intégration de l'équation

$$u_{n+2} = \frac{1}{2} (u_{n+1} + u_n),$$

on trouve

$$p_n = \frac{2}{3} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] p_a,$$

et, par conséquent,

$$p_a - p_n = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right] p_a;$$

donc, d'après (1), l'équation de B_nC_n et par suite celles de C_nA_n, A_nB_n seront

$$(2) \quad \begin{cases} [2^n + (-1)^{n+1}] (b\beta + c\gamma) - [2^{n+1} + (-1)^n] a\alpha = 0, \\ [2^n + (-1)^{n+1}] (c\gamma + a\alpha) - [2^{n+1} + (-1)^n] b\beta = 0, \\ [2^n + (-1)^{n+1}] (a\alpha + b\beta) - [2^{n+1} + (-1)^n] c\gamma = 0. \end{cases}$$

Il reste à trouver l'équation du cercle passant par les points d'intersection des lignes

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha + \mu_1\beta + \nu_1\gamma = 0, \\ \lambda_2\alpha + \mu_2\beta + \nu_2\gamma = 0, \\ \lambda_3\alpha + \mu_3\beta + \nu_3\gamma = 0. \end{cases}$$

Elle est

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1, \mu_1, \nu_1) \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}}{\lambda_1 \alpha + \mu_1 \beta + \nu_1 \gamma} + (\lambda_2, \mu_2, \nu_2) \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}}{\lambda_2 \alpha + \mu_2 \beta + \nu_2 \gamma} \\
 & + (\lambda_3, \mu_3, \nu_3) \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}}{\lambda_3 \alpha + \mu_3 \beta + \nu_3 \gamma} = 0,
 \end{aligned}$$

où nous posons, pour abrégér,

$$(\lambda, \mu, \nu) = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu \cos A - 2\nu\lambda \cos B - 2\lambda\mu \cos C.$$

Ainsi, on a pour l'équation cherchée,

$$\frac{a^2}{b\beta + c\gamma - k_n a\alpha} + \frac{b^2}{c\gamma + a\alpha - k_n b\beta} + \frac{c^2}{a\alpha + b\beta - k_n c\gamma} = 0,$$

où

$$k_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^n + (-1)^{n+1}}.$$

Quand on pose $n = \infty$, on a $k_n = 2$; d'où l'on voit que ces cercles de neuf points ont pour limite le point de concours des droites

$$\begin{cases} b\beta + c\gamma - 2a\alpha = 0, \\ c\gamma + a\alpha - 2b\beta = 0, \\ a\alpha + b\beta - 2c\gamma = 0. \end{cases}$$

Le point dont il s'agit coïncide évidemment (*) avec le centre de gravité de l'aire ABC.

En faisant

$$L = a\alpha + b\beta + c\gamma, \quad \rho_n = (1 + k_n),$$

(*) Cela devient encore bien plus évident quand on fait usage de quelques considérations géométriques très-simples tirées de la similitude des triangles considérés.

nous aurons pour les équations des cercles passant par $A_r, B_r, C_r; A_s, B_s, C_s$ respectivement,

$$S_r = a^2(L - \rho_r b\beta)(L - \rho_r c\gamma) + b^2(L - \rho_r c\gamma)(L - \rho_r a\alpha) \\ + c^2(L - \rho_r a\alpha)(L - \rho_r b\beta) = 0,$$

$$S_s = a^2(L - \rho_s b\beta)(L - \rho_s c\gamma) + b^2(L - \rho_s c\gamma)(L - \rho_s a\alpha) \\ + c^2(L - \rho_s a\alpha)(L - \rho_s b\beta) = 0,$$

d'où

$$\rho_s^2 S_r - \rho_r^2 S_s = L^2(\rho_s^2 - \rho_r^2)(a^2 + b^2 + c^2) - L\rho_r\rho_s(\rho_s - \rho_r) \\ \times [a^2(b\beta + c\gamma) + b^2(c\gamma + a\alpha) + c^2(a\alpha + b\beta)],$$

et par conséquent

$$\rho_s^2 S_r - \rho_r^2 S_s = L(\rho_s - \rho_r) \\ \times [(a^2 + b^2 + c^2)(\rho_r + \rho_s - \rho_r\rho_s)L + \rho_r\rho_s(a^3\alpha + b^3\beta + c^3\gamma)];$$

donc l'axe radical des cercles S_r, S_s a pour équation

$$\left(\frac{1}{\rho_r} + \frac{1}{\rho_s} - 1\right)(a^2 + b^2 + c^2)L + a^3\alpha + b^3\beta + c^3\gamma = 0.$$

Il suit de là que l'axe radical de deux quelconques des cercles considérés est donné en direction par l'équation

$$a^3\alpha + b^3\beta + c^3\gamma = 0.$$

Si l'on fait $S = 0$, on aura $k_s = \infty$, et, par conséquent, $\rho_s = \infty$, ou $\frac{1}{\rho_s} = 0$.

Donc l'axe radical de S_r, S_0 a pour équation

$$\left(\frac{1}{\rho_r} - 1\right)(a^2 + b^2 + c^2)L + a^3\alpha + b^3\beta + c^3\gamma = 0;$$

le cercle représenté par S_0 est évidemment le cercle circonscrit au triangle ABC.

Il est bon de remarquer que la droite

$$a^3\alpha + b^3\beta + c^3\gamma = 0$$

est parallèle à

$$\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C = 0.$$

Or, cette dernière équation représente l'axe radical commun des cercles S_0, S, Σ , où Σ désigne le cercle par rapport auquel chaque sommet A, B, C est le pôle du côté opposé. On trouve donc que tous les axes radicaux du système $\Sigma, S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ sont parallèles.

On peut démontrer d'une manière analogue que l'équation du cercle inscrit au triangle $A_n B_n C_n$ sera

$$\begin{aligned} & \sqrt{\cot \frac{A}{2} (b\beta + c\gamma - k_n a\alpha)} + \sqrt{\cot \frac{B}{2} (c\gamma + a\alpha - k_n b\beta)} \\ & + \sqrt{\cot \frac{C}{2} (a\alpha + b\beta - k_n c\gamma)} = 0. \end{aligned}$$