

ROUQUEL

**Agrégation des lycées. Concours de
1863. Composition d'analyse**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 523-526

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_523_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES LYCÉES. — CONCOURS DE 1865.

Composition d'Analyse ;

SOLUTION DE M. ROUQUEL,

Licencie ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

Déterminer l'équation différentielle des lignes de courbure.

Lorsque la courbe d'intersection de deux surfaces est pour chacune d'elles une ligne de courbure, ces surfaces se coupent constamment sous le même angle.

L'étude des lignes de courbure et de leurs propriétés générales se trouvant dans tous les traités, je me bornerai ici à écrire leur équation différentielle

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy^2}{dx^2} [s(1+p^2) - pqt] + \frac{dy}{dx} [r(1+q^2) - t(1+p^2)] \\ + pqr - s(1+p^2) \end{aligned} \right\} = 0^{(*)},$$

dans laquelle p, q, r, s et t représentent respectivement les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx dy}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$.

On peut résoudre la seconde question par l'analyse de la manière suivante :

Considérons un point quelconque O sur la ligne d'intersection des deux surfaces données. Rapportons la figure à un système d'axes de coordonnées rectangulaires, ayant le point O pour origine et tel, que l'axe Ox soit dirigé suivant la tangente en O à la ligne d'intersection.

A l'origine, on aura évidemment

$$p = 0, \quad p' = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

(les lettres accentuées se rapportent à la seconde surface). Si V désigne l'angle des normales menées par le

(*) On a donné à l'équation différentielle des lignes de courbure une autre forme qu'il est utile de rappeler. Si

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

représente l'équation différentielle de la surface considérée, celle de ses lignes de courbure est

$$dr(Y dZ - Z dY) + dy(Z dX - X dZ) + dz(X dY - Y dX) = 0. \quad G.$$

point O aux deux surfaces, la formule générale

$$\cos V = \frac{pp' + qq' + 1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1} \sqrt{p'^2 + q'^2 + 1}}$$

donnera dans ce cas

$$\cos V = \frac{qq' + 1}{\sqrt{q^2 + 1} \sqrt{q'^2 + 1}}.$$

De plus, Ox étant par hypothèse tangente à l'une des lignes de courbure passant en O de la première surface, l'équation différentielle transcrite plus haut devra être satisfaite lorsqu'on y remplacera $\frac{dy}{dx}$ par la valeur particulière qui correspond à ce point.

On verra dès lors, en tenant compte de la valeur de p , qu'à l'origine

$$s = 0,$$

et de même que

$$s' = 0.$$

Cela posé, par un point infiniment voisin O' de la ligne d'intersection menons les normales à chaque surface. La différence entre le cosinus du nouvel angle et le cosinus du premier sera égale à la différentielle de $\cos V$, et, si l'on prouve que cette différentielle est nulle, on aura démontré par cela même que ces deux angles sont rigoureusement égaux.

Or l'on a, en général,

$$dq = tdy + sdx = dx \left(t \frac{dy}{dx} + s \right).$$

Mais on a à l'origine

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad s = 0,$$

donc

$$dq = 0;$$

de même

$$dq' = 0.$$

Par suite

$$d(\cos V) = 0.$$

Le même raisonnement pouvant être appliqué à tout autre point de la ligne d'intersection, il s'ensuit que, pour tous les points de cette ligne, l'angle des normales aux surfaces ou l'angle de ces surfaces elles-mêmes est constant.

C. Q. F. D.

On peut également arriver au résultat qui précède par des considérations de géométrie infinitésimale.

Si par les deux points O et O' on mène les normales à la première surface, ces normales, d'après une propriété bien connue des lignes de courbure, se coupent en un point A, ou pour mieux dire, leur plus courte distance du troisième ordre au moins par rapport à OO' peut être négligée. Les normales en O et O' à la deuxième surface se couperont de même en B.

Les triangles AOB et AO'B ont le côté AB commun; les côtés AO et AO', ne différant que d'une quantité infiniment petite du second ordre au moins, sont égaux, et il en est de même des côtés BO et BO'. Donc

$$\widehat{AOB} = \widehat{AO'B}.$$

C. Q. F. D.

Note du Rédacteur. — Cette proposition, que si la courbe d'intersection de deux surfaces est pour chacune d'elles une ligne de courbure, ces surfaces se coupent constamment sous le même angle, est due, je crois, à mon ancien collaborateur M. Terquem. C'est une des questions proposées, il y a onze ans, dans les *Nouvelles Annales* (question 269, t. XI, p. 402). Voici les solutions que MM. Faure et Dewulf en ont données.
