

R. MALLOIZEL

**Problème proposé au concours général dans
la classe de rhétorique (sciences, année 1863)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 515-519

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_515_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**PROBLÈME PROPOSÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL
DANS LA CLASSE DE RHÉTORIQUE (SCIENCES, ANNÉE 1863);**

SOLUTION DE M. R. MALLOIZEL,
Élève du lycée Louis-le-Grand (*).

ENONCÉ. — *Dans un triangle ABC, où le rayon du cercle circonscrit est égal à l'unité, on mène les bissectrices des suppléments des angles; on forme ainsi un deuxième triangle A'B'C' (le sommet A' se trouvant dans l'angle A, etc). On donne le rapport λ du côté AB à la somme des deux autres BC et AC; le rapport μ du côté A'B' à la somme des deux autres B'C' et A'C'. On demande de résoudre le triangle ABC, et de trouver les conditions de possibilité du problème.*

Appelons A, B, C; a, b, c les angles et les côtés du premier triangle; A', B', C'; a', b', c' les angles et les côtés du second.

L'énoncé nous donne les relations

$$\frac{c}{a+b} = \lambda, \quad \frac{c'}{a'+b'} = \mu.$$

1^o Calculons les angles A, B, C.

On a, dans le triangle ABC,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

d'où

$$\frac{c}{a+b} = \frac{\sin C}{\sin A + \sin B} = \lambda,$$

(*) M. R. Malloizel a obtenu le premier prix au Concours.

(516)

ou

$$\frac{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \lambda,$$

ou

$$(1) \quad \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} = \lambda.$$

Nous avons ainsi une première équation entre les angles $\frac{C}{2}$ et $\frac{A-B}{2}$. Cherchons-en une seconde.

Nous aurons dans le triangle $A'B'C'$, comme dans le triangle ABC , l'équation

$$\frac{c'}{a' + b'} = \frac{\sin \frac{C'}{2}}{\cos \frac{A' - B'}{2}} = \mu.$$

Or, on reconnaît facilement sur la figure, en menant les bissectrices des trois angles A , B , C , les relations :

$$C' = \frac{A+B}{2}, \quad B' = \frac{A+C}{2}, \quad A' = \frac{B+C}{2}.$$

Notre dernière égalité devient donc

$$\frac{\sin \frac{A+B}{4}}{\cos \frac{A-B}{4}} = \mu.$$

On sait que

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

(517)

Appliquant ces formules, il vient

$$\frac{\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{A+B}{2}}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{A-B}{2}}{2}}} = \mu,$$

ou

$$(2) \quad \frac{1 - \sin \frac{C}{2}}{1 + \cos \frac{A-B}{2}} = \mu^2.$$

Reste donc à résoudre les deux équations (1) et (2) du premier degré en $\sin \frac{C}{2}$ et $\cos \frac{A-B}{2}$:

$$\frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} = \lambda, \quad \frac{1 - \sin \frac{C}{2}}{1 + \cos \frac{A-B}{2}} = \mu^2,$$

ou

$$\sin \frac{C}{2} = \lambda \cos \frac{A-B}{2},$$

$$1 - \sin \frac{C}{2} = \mu^2 + \mu^2 \cos \frac{A-B}{2}.$$

Remplaçons dans la seconde équation $\sin \frac{C}{2}$ par $\lambda \cos \frac{A-B}{2}$ il viendra

$$1 - \lambda \cos \frac{A-B}{2} = \mu^2 + \mu^2 \cos \frac{A-B}{2},$$

ou

$$\cos \frac{A-B}{2} = \frac{1 - \mu^2}{\lambda + \mu^2}.$$

(λ et μ étant des nombres donnés, cette expression sera facilement calculable par logarithmes.)

(518)

Nous pourrions alors calculer $\frac{A-B}{2}$, par suite $\frac{C}{2}$, et enfin les trois angles A, B, C.

2° Passons au calcul des côtés.

On a les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2,$$

le rayon du cercle circonscrit étant égal à l'unité; d'où l'on tire

$$a = 2 \sin A,$$

$$b = 2 \sin B,$$

$$c = 2 \sin C.$$

Les angles A, B, C ayant été calculés, nous aurons les valeurs des trois côtés a, b, c.

3° *Discussion.*

La valeur de $\cos \frac{A-B}{2}$ doit être positive et plus petite que l'unité, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\frac{1-\mu^2}{\lambda+\mu^2} > 0 \quad \text{ou} \quad \mu < 1,$$

et

$$1-\mu^2 < \lambda+\mu^2 \quad \text{ou} \quad 2\mu^2 > 1-\lambda.$$

On a

$$\sin \frac{C}{2} = \lambda \cos \frac{A-B}{2},$$

et

$$\cos \frac{A-B}{2} > \cos \frac{A+B}{2},$$

ou

$$\cos \frac{A-B}{2} > \sin \frac{C}{2};$$

donc il faut qu'on ait

$$\lambda < 1.$$

Les trois conditions de la possibilité du problème sont donc

$$\begin{aligned}\lambda &< 1, \\ \mu &< 1, \\ \mu &> \sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}.\end{aligned}$$

Les deux premières conditions étaient évidentes *à priori*.

Le problème, quand ces conditions sont remplies, n'admet qu'une solution.

Comme cas limite, $\mu = \sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}$, on a alors

$$\cos \frac{A-B}{2} = 1,$$

d'où

$$A = B.$$

Le triangle est alors isocèle.