Nouvelles annales de mathématiques

Rouquel

Questions 658, 659, 660 et 661 (proposées par M. Haton de la Goupillière)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 494-502

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__494_1>

QUESTIONS 658, 659, 660 ET 661
(PROPOSÉES PAR M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE);

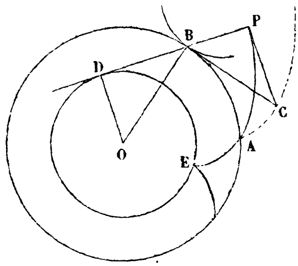
SOLUTIONS DE M. ROUQUEL,
Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

Question 658.

La développante d'un cercle est la route que suit le *pôle d'une spirale logarithmique roulant sur un autre cercle.*

Faisons rouler une spirale logarithmique sur un cercle de rayon arbitraire OB, et proposons-nous de déterminer la courbe décrite par le pôle P.

Soient B le point de contact des deux courbes, P la



position correspondante du pôle, BC la tangente commune. Tirons OD perpendiculaire à PB prolongée. D'après une propriété connue de la spirale, l'angle $\widehat{DBC}$ est constant. Il en sera donc de même de l'angle $\widehat{OBD}$, et par suite de la distance OD.

D'un autre côté, BP est normale à la trajectoire du point P, et l'on vient de voir que cette ligne, BP, se trouve à une distance constante du point O, c'est-à-dire qu'elle est constamment tangente au cercle décrit du point O comme centre avec OD pour rayon. La route du point P est donc la développante du cercle OD.

Remarque I. — Soit

$$r = ae^{m\theta}$$

l'équation polaire de la spirale; on trouvera aisément, pour le rapport des rayons des deux cercles :

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OB}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Remarque II. — Si la spirale roule à l'extérieur du cercle OB, le pôle engendrera la portion de développante du cercle OD extérieure au premier cercle. Pour avoir la position initiale A du point P, il faut observer que l'arc BA doit être égal à la longueur de l'arc de spirale compris entre le point B et le pôle, c'est-à-dire à la portion de tangente BC limitée en C par une perpendiculaire menée par le point P au rayon vecteur.

Le point de départ étant toujours en A, si l'on fait rouler la spirale dans l'intérieur du cercle OB et dans le sens AB, le point P engendrera la partie restante de la développante du cercle OD. Lorsque le pôle sera parvenu en E sur le cercle OD, le rayon de courbure de la spirale correspondant au point de contact égalera le rayon du cercle OB : les deux courbes, ayant un contact du second ordre, se traverseront. Le mouvement continuant, il est clair que le cercle OB sera intérieur à la portion de spirale qui doit rouler sur lui. En E, la courbe décrite par le pôle offrira un point de rebroussement, et l'on obtiendra une développante symétrique de la première, ou, pour mieux dire, l'autre branche de la développante.

Remarque III. — Relativement à la partie mobile du plan, le lieu du point C est une spirale égale à la première, et dont celle-ci est la développée. Dans l'espace fixe, le point C décrit la développante du cercle OB. On voit tout de suite que la deuxième spirale et la développante AC ont en C un contact du deuxième ordre, ce qui conduit à ce théorème :

Quand une spirale logarithmique roule sur un cercle, l'enveloppe d'une deuxième spirale, dont la première serait la développée, est la développante du même cercle, l'ordre du contact de l'enveloppe et de l'enveloppée étant toujours le second.

Question 659.

La caustique par réflexion de la développante d'un cercle, pour les rayons émanés du centre, est une développée de la spirale d'Archimède.

La spirale d'Archimède jouit de cette propriété bien connue, que la normale en un point de cette courbe fait avec le rayon vecteur aboutissant en ce point un angle dont la cotangente est égale à l'angle formé par ce rayon et l'*axe polaire*.

Cela posé, je considère l'un des rayons lumineux qui, partant du centre O d'un cercle OA, vont se réfléchir sur la développante AM de ce cercle. Soient OM le rayon incident dont je désignerai par ρ la longueur comprise entre le centre et le point d'incidence M; MB la normale à la développante, touchant en B le cercle OA; MC le rayon réfléchi.

Par le point O, je tire ON parallèle à BM, rencontrant en N, MC prolongée. En outre, je mène OX perpendiculaire à OA, choisissant le sens OX de manière que l'arc AX vaille 270 degrés.

Je me propose de démontrer que le lieu des points N est une spirale d'Archimède ayant pour équation

$$r = 2a\theta,$$

a désignant le rayon du cercle et OX étant l'axe polaire.

En effet, on a

$$\text{ON} = 2\,\text{MB} = 2\sqrt{\rho^2 - a^2},$$

$$\widehat{\text{NOX}} = \widehat{\text{BOA}} = \frac{\text{arc AB}}{a} = \frac{\text{BM}}{a} = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a}.$$

Les coordonnées polaires du point N satisfont à l'équation de la courbe, comme il est facile de s'en assurer.

De plus, la normale en N à cette spirale forme avec le rayon vecteur ON un angle μ tel, que

$$\cot\mu = \widehat{\text{XON}} = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a};$$

mais

$$\cot\widehat{\text{ONC}} = \cot\widehat{\text{OMB}} = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a};$$

par suite

$$\mu = \widehat{\text{ONC}},$$

NC est normale en N à la spirale considérée, et la caustique demandée n'est autre que la développée de cette spirale.

Question 660.

La courbe réciproque de la développante d'un cercle, pour des rayons émanés du centre, est une spirale tractrice. (On appelle ainsi la courbe qui, en coordonnées polaires, a une tangente constante.)

Soient M un point appartenant à la développante AMM′ d'un cercle OA; MB la normale à la développante, touchant en B le cercle OA; m le pied de la perpendiculaire abaissée du point B sur OM. On propose de déterminer le lieu du point m.

Considérons sur la développante un point M′ infiniment voisin de M; soit m' le point qui lui correspond sur la courbe réciproque. Posons

$$\left.\begin{array}{ll} \text{OM} = \text{R}, & om = r, \\ \text{OM}' = \text{R} + d\text{R}, & om' = r + dr, \\ \text{MM}' = d\text{S}, & mm' = ds, \end{array}\right\} \quad a = \text{rayon du cercle.}$$

L'équation différentielle de la développante est

$$\text{R}\,d\text{R} = a\,d\text{S}. \tag{1}$$

Le triangle rectangle MOB donne

$$(2) \qquad Rr = a^2,$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad R\,dr + r\,dR = 0.$$

Les deux triangles Omm', OMM' étant semblables, il vient

$$(4) \qquad \frac{dS}{R} = \frac{ds}{r}.$$

Entre les équations (1), (2), (3), (4), éliminant R, dR, dS, on obtient, pour l'équation différentielle de la courbe demandée,

$$(5) \qquad r\,ds + a\,dr = 0,$$

d'où

$$r\frac{ds}{dr} = -a.$$

Cette dernière égalité démontre la propriété énoncée, en remarquant que $r\dfrac{ds}{dr}$ représente, en coordonnées polaires, la longueur de la tangente.

Note sur la spirale tractrice.

La longueur de la tangente étant négative, il s'ensuit que l'angle formé par la partie positive de la tangente avec le rayon vecteur est obtus. Cela résulte, au reste, de ce que les lignes MM', mm' sont antiparallèles relativement à OM, et de ce que l'angle $OM'M$ est toujours aigu.

La valeur maximum du rayon vecteur est a; si l'on compte les arcs à partir du point A où le rayon r acquiert cette valeur, en trouve aisément

$$s = a \times \mathrm{L}\left(\frac{a}{r}\right) = -a \times \mathrm{L}(\sin\alpha),$$

α étant l'angle formé par le rayon vecteur et la normale, puisque cet angle est fourni par l'équation

$$\sin\alpha = \frac{r}{a}.$$

De l'équation différentielle

$$rds + adr = 0,$$

on peut déduire la valeur du rayon de courbure ρ :

$$\rho = \frac{r\cos\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Cette formule fournit une construction très-simple du centre de courbure.

La courbe offre un point d'inflexion, pour la valeur $\cos 2\alpha = 0$, qui correspond à $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

On pourrait trouver l'équation finie entre r et θ, en intégrant l'équation (5), mais on peut y parvenir plus simplement de la manière suivante :

L'axe polaire étant OA, l'équation de la développante est

$$\theta = \pm\left(\frac{1}{a}\sqrt{\mathrm{R}^2 - a^2} - \operatorname{arc}\cos\frac{a}{\mathrm{R}}\right).$$

θ étant le même, on a

$$\mathrm{R}r = a^2, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{R} = \frac{a^2}{r};$$

remplaçant R par cette valeur, il vient, pour l'équation polaire de la tractrice,

$$\theta = \pm \left(\frac{1}{r} \sqrt{a^2 - r^2} - \text{arc cos} \frac{r}{a} \right).$$

La spirale se compose de deux branches symétriques par rapport à OA, ayant leur point de départ en A où elles admettent OA pour tangente commune, et se rapprochant indéfiniment du centre, qui est un point asymptotique. Les points d'inflexion correspondent aux valeurs

$$\theta = \pm \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

Question 661.

La spirale tractrice est la trajectoire que suit le pôle d'une spirale hyperbolique roulant sur elle-même en partant de la coïncidence des deux pôles.

Pour se trouver dans les conditions de l'énoncé, il faut imaginer que l'une des branches d'une spirale hyperbolique roule sur l'autre, en partant du pôle, où ces deux branches admettent pour tangente commune une perpendiculaire à l'axe polaire.

Soient P le pôle fixe, A le point de contact des deux courbes correspondant à la position M du pôle mobile; AN la tangente commune évidemment perpendiculaire à PM en son milieu.

La ligne MA est normale à la trajectoire du point M.

Je mène MT perpendiculaire à AM, rencontrant en N la tangente commune, et en T la perpendiculaire PT au rayon vecteur PM.

MT est la longueur de la tangente à la courbe décrite par le point M, et MN représente la sous-tangente de la spirale hyperbolique.

D'après une propriété connue de la spirale hyperbolique, MN est constante; il en sera donc de même de MT, puisque $MT = 2MN$.

Le lieu du point M est, par suite, une spirale tractrice (*).