

MISTER

NEUBERG

**Lieu des points de rencontre des tangentes
communes à une conique et à un cercle
(voir t. X, p. 408 et t. XI, p. 62)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 481-488

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_481_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LIEU DES POINTS DE RENCONTRE DES TANGENTES COMMUNES A UNE CONIQUE ET A UN CERCLE

[voir t. X, p. 408 (*), et t. XI, p. 62] ;

PAR MM. MISTER ET NEUBERG,

Professeurs de Mathématiques à Nivelles (Belgique).

1. PROBLÈME. — *Par deux points donnés sur une ellipse on fait passer une circonférence quelconque, puis on mène à ces deux courbes des tangentes communes; trouver le lieu géométrique du point de rencontre de ces tangentes.* (CHASLES.)

Le lieu reste le même lorsque la corde commune se déplace parallèlement à elle-même.

Le lieu reste encore le même, que la corde commune fasse l'angle ϑ , ou l'angle $180^\circ - \vartheta$, avec le grand axe de l'ellipse.

Rapportons l'ellipse à ses axes principaux : son équation sera

$$(1) \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Soient

$$y + mx + n = 0,$$

$$y + m'x + n' = 0$$

les équations des deux tangentes communes, et

$$y + \alpha x + \beta = 0,$$

$$y + \alpha'x + \beta' = 0$$

(*) Tome X, page 411, on lit cette note de M. Terquem : « La solution purement analytique présente des difficultés de calcul à cause des quatre tangentes communes. Cette solution serait très-instructive. »

les équations des cordes de contact relatives à ces tangentes, dans le cercle variable et dans l'ellipse.

Les équations du cercle et de l'ellipse peuvent se mettre sous la forme

$$(2) \quad (y + mx + n)(y + m'x + n') + \lambda(y + \alpha x + \beta)^2 = 0,$$

$$(3) \quad (y + mx + n)(y + m'x + n') + \lambda'(y + \alpha'x + \beta')^2 = 0.$$

L'équation (2) représentant un cercle, les coefficients des carrés des variables doivent être égaux, et le rectangle des variables devra disparaître, ce qui exige que l'on ait

$$(4) \quad 1 + \lambda = mm' + \lambda\alpha^2,$$

$$(5) \quad m + m' + 2\lambda\alpha = 0.$$

En retranchant les équations (2) et (3) membre à membre, on obtient les équations de deux droites passant par les points d'intersection du cercle et de l'ellipse; ces équations sont :

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}(y + \alpha x + \beta) = (y + \alpha'x + \beta'),$$

$$- \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}(y + \alpha x + \beta) = (y + \alpha'x + \beta').$$

Or, si l'on veut que l'une des cordes communes soit fixe, il suffira d'identifier l'une de ces deux équations avec celle de la droite passant par les deux points communs aux deux courbes, équation que nous supposons être

$$y + Mx + R = 0.$$

On aura donc

$$(6) \quad \frac{\pm \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}} \cdot \alpha - \alpha'}{\pm \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}} - 1} = M,$$

$$(7) \quad \frac{\pm \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}} \cdot \beta - \beta'}{\pm \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}} - 1} = R.$$

Si nous appelons X et Y les coordonnées du lieu, les quantités $m, m', \lambda', \alpha', \beta'$ seront des fonctions de X, Y, a, b faciles à déterminer. Dès lors, les équations (4), (5), (6), (7), qui expriment toutes les conditions du problème, ne contiendront plus que trois paramètres variables, λ, α, β , et par suite, si nous éliminons α, β, λ entre ces quatre équations, nous aurons l'équation de la courbe cherchée.

Pour déterminer les valeurs de m et de m' , remarquons que l'équation d'une tangente à l'ellipse peut s'écrire

$$y + mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2} = 0,$$

et si nous voulons déterminer les deux tangentes passant par le point (X, Y) , il suffira de résoudre l'équation

$$Y + mX + \sqrt{a^2 m^2 + b^2} = 0,$$

ou

$$(X^2 - a^2) m^2 + 2 YX . m + Y^2 - b^2 = 0,$$

par rapport à m . En conséquence, nous aurons :

$$(8) \quad m + m' = - \frac{2 YX}{X^2 - a^2},$$

$$(9) \quad mm' = \frac{Y^2 - b^2}{X^2 - a^2}.$$

De plus, l'équation de la corde de contact, relative à ces deux tangentes, étant

$$a^2 Yx + b^2 Xy - a^2 b^2 = 0,$$

on a immédiatement

$$(10) \quad \alpha' = \frac{b^2 X}{a^2 Y},$$

$$(11) \quad \beta' = -\frac{b^2}{Y}.$$

Comme l'équation (3) doit être identiquement la même que l'équation (1), on obtiendra la valeur de λ' en égalant à zéro le coefficient du rectangle des variables, ce qui donne

$$(12) \quad m + m' + 2\lambda'\alpha' = 0.$$

En comparant l'équation (5) avec l'équation (12), on obtient

$$(5') \quad \lambda\alpha = \lambda'\alpha'.$$

L'équation (6) étant rendue rationnelle devient

$$\lambda(\alpha - M)^2 = \lambda'(\alpha' - M)^2;$$

remplaçant dans cette équation λ par sa valeur $\frac{\lambda'\alpha'}{\alpha}$ tirée de (5'), nous aurons

$$\alpha\alpha'(\alpha - \alpha') = M^2(\alpha - \alpha'),$$

et, comme généralement α est différent de α' , on peut poser

$$\alpha\alpha' = M^2,$$

ou

$$\alpha = \frac{M^2}{\alpha'};$$

par suite, les équations (4) et (5) deviendront

$$1 - mn' + \lambda \left(1 - \frac{M^2}{\alpha'^2} \right) = 0,$$

$$m + m' + \frac{2\lambda M^2}{\alpha'} = 0;$$

d'où, en éliminant λ ,

$$(13) \quad \frac{1 - mm'}{m + m'} = \frac{\alpha' - M}{2M^2\alpha'},$$

et en faisant usage des équations (8), (9) et (10) et posant $a^2 - b^2 = c^2$, il vient, réductions faites,

$$(14) \quad (M^4 a^4 + M^2 a^2 b^2) y^2 - (M^2 a^2 b^2 + b^4) x^2 = -M^2 a^2 b^2 c^2,$$

équation du lieu cherché.

Remarquons que pour obtenir cette équation on ne fait nullement usage de l'équation (7), qui est la seule renfermant le paramètre R; donc le lieu est indépendant de R, et par conséquent *il reste le même lorsque la corde commune se déplace parallèlement à elle-même*. Si les deux extrémités de cette corde viennent se réunir en un seul point, la corde devient tangente et l'on retombe sur le problème proposé au concours général, année 1844. (Voir *Nouvelles Annales*, t. III, p. 425 et p. 489.)

Remarquons, en second lieu, que le coefficient M qui fixe l'inclinaison de la corde commune n'entre qu'à des puissances paires dans l'équation de la courbe; par conséquent, cette équation restera la même lorsqu'on y remplacera M par $-M$, d'où l'on conclut que *le lieu reste encore le même, que la corde commune fasse l'angle δ ou l'angle $180^\circ - \delta$ avec le grand axe de l'ellipse*.

2. L'équation (14) du lieu peut se mettre sous une forme assez simple. A cet effet, menons une tangente à l'ellipse parallèle à la corde commune, et soient p et q les coordonnées du point de contact : on aura

$$M = \frac{b^2 p}{a^2 q},$$

et, par la substitution, l'équation (14) devient

$$b^2 p^2 (b^2 p^2 + a^2 q^2) Y^2 - a^2 q^2 (b^2 p^2 + a^2 q^2) X^2 = -p^2 q^2 a^2 b^2 c^2.$$

Mais, le point $x = p$, $y = q$, étant situé sur l'ellipse, on a

$$b^2 p^2 + a^2 q^2 = a^2 b^2,$$

et par suite l'équation (14) pourra s'écrire

$$(14') \quad \frac{Y^2}{\frac{q^2 c^2}{b^2}} - \frac{X^2}{\frac{p^2 c^2}{a^2}} = -1.$$

Sous cette forme, on reconnaît que la courbe cherchée est une hyperbole rapportée à ses axes principaux, et ayant pour excentricité $2 \sqrt{\frac{q^2 c^2}{b^2} + \frac{p^2 c^2}{a^2}} = 2c$. Elle est donc homofocale avec l'ellipse donnée. On voit d'ailleurs qu'elle passe par le point (p, q) .

Si, au lieu d'une ellipse, on donnait une hyperbole, l'équation (1) serait remplacée par

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et on trouverait pour l'équation du lieu

$$\frac{Y^2}{\frac{q^2 c^2}{b^2}} + \frac{X^2}{\frac{p^2 c^2}{a^2}} = 1,$$

qui est celle d'une ellipse homofocale avec l'hyperbole donnée.

Supposons en troisième lieu que la courbe donnée soit une parabole ayant pour équation

$$(15) \quad y^2 = 2Px.$$

Les calculs se traitent de la même manière, et l'on arrive encore à l'équation

$$(13) \quad \frac{1 - mm'}{m + m'} = \frac{\alpha'^2 - M^2}{2M^2 \alpha'}.$$

Mais comme, dans la parabole, l'équation d'une tangente est

$$y + mx + \frac{P}{2m} = 0,$$

les valeurs de m et de m' seront les racines de l'équation

$$m^2 + \frac{Y}{X} m + \frac{P}{2X} = 0,$$

et par suite

$$m + m' = -\frac{Y}{X}, \quad mm' = \frac{P}{2X}.$$

De plus, l'équation de la corde de contact étant

$$Yy - Px - PX = 0,$$

on aura

$$\alpha' = -\frac{P}{Y},$$

et, en substituant dans l'équation (13), on obtient pour l'équation du lieu :

$$(16) \quad (2X - P) PM^2 = P^2 - M^4 Y^2.$$

On voit encore que le lieu reste le même lorsque la corde commune se déplace parallèlement à elle-même, en faisant l'angle δ ou $180^\circ - \delta$ avec l'axe de la parabole.

En appelant encore p et q les coordonnées du point de contact de la tangente parallèle à la corde commune, on aura

$$M = \frac{P}{q},$$

et l'équation (16) deviendra

$$Y^2 = -\frac{2q^2}{P} X + \frac{q^4 + P^2 q^2}{P^2},$$

ou

$$(17) \quad Y^2 = -4p X + 4p^2 + q^2.$$

(488)

On trouve donc pour le lieu une parabole, rapportée à son axe principal, ayant même foyer que la proposée, et tournée dans un sens opposé. Elle passe par le point (p, q) et elle a pour paramètre $4p$, c'est-à-dire quatre fois l'abscisse du point de contact.