

J.-CH. DUPAIN

Note sur les annuités

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 464-466

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__464_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES ANNUITÉS;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Une personne contracte un emprunt remboursable au moyen de n annuités de a francs; on a calculé qu'il serait aussi avantageux pour elle de payer m annuités de b francs. On demande à combien on évalue le taux de l'intérêt. Le premier paiement s'effectue un an après le jour de l'emprunt.

Appelons x l'intérêt annuel d'un franc; la valeur de la dette au moment où elle est contractée peut se représenter indifféremment par

$$\frac{a[(1+x)^n-1]}{x(1+x)^n} \quad \text{ou par} \quad \frac{b[(1+x)^m-1]}{x(1+x)^m};$$

on en conclut que

$$(a-b)(1+x)^m - a(1+x)^{m-n} + b = 0,$$

ou, en posant $y = 1+x$,

$$(1) \quad y^m - \frac{a}{a-b} y^{m-n} + \frac{b}{a-b} = 0.$$

Les annuités étant évidemment inégales, on peut supposer $a > b$, ce qui exige par compensation $m > n$.

L'équation (1) a pour racine l'unité, et comme d'ailleurs son premier membre présente deux variations, le nombre des racines positives est certainement deux.

La règle de Descartes permet de compter les racines négatives :

$$\left\{ \begin{array}{l} m \text{ impair} \dots \dots \dots \text{ une racine négative,} \\ m \text{ pair} \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} n \text{ pair} \dots \dots \text{ deux racines négatives,} \\ n \text{ impair} \dots \dots \text{ pas de racines négatives.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les racines négatives n'ont pas d'importance dans la question proposée.

L'équation dérivée

$$(2) \quad m\gamma^{m-1} - \frac{a}{a-b} (m-n) \gamma^{m-n-1} = 0$$

a toujours $m - n - 1$ racines nulles, une racine positive

$\sqrt[n]{\frac{a(m-n)}{m(a-b)}}$, et, si n est pair, une racine négative. La

racine positive de la dérivée *sépare* les deux racines positives de l'équation (1). Or, d'après la nature du problème, il faut que γ ait une valeur supérieure à 1; il faut donc aussi que la racine positive de la dérivée soit supérieure à l'unité, ce qui revient à $\frac{m}{n} > \frac{a}{b}$.

La règle de Lagrange donne pour limite supérieure des racines de l'équation (1) $\sqrt[n]{\frac{a}{a-b}}$. En effet, cette quantité est plus grande que l'unité, et si on la substitue à γ dans le premier membre de l'équation (1), on trouve un résultat positif $\frac{b}{a-b}$.

La valeur convenable de γ étant ainsi comprise entre deux nombres connus peut s'obtenir par les méthodes ordinaires d'approximation.

Dans quelques cas particuliers elle est une fonction

explicite des données. Soit $2m = 3n$, l'équation (1) deviendra

$$y^{3(m-n)} - \frac{a}{a-b} y^{m-n} + \frac{b}{a-b} = 0;$$

le premier membre est alors divisible par $y^{m-n} - 1$, et l'on trouve

$$y = \sqrt[m-n]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{b}{a-b}}}.$$

Si $m = 2n$,

$$y^{2n} - \frac{a}{a-b} y^n + \frac{b}{a-b} = 0;$$

le premier membre est divisible par $y^n - 1$, et l'on trouve

$$y = \sqrt[n]{\frac{b}{a-b}}.$$

Si $m = 3n$,

$$y^{3n} - \frac{a}{a-b} y^n + \frac{b}{a-b} = 0;$$

le premier membre est encore divisible par $y^n - 1$, et l'on trouve

$$y = \frac{1}{\sqrt[n]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a-b}{b}}}}.$$
