

HAAG

## **Solution géométrique de la question 644**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1863), p. 415-417

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1863\\_2\\_2\\_\\_415\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__415_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 644;**

PAR M. HAAG,

Élève de Mathématiques spéciales du lycée Saint-Louis

(classe de M. Briot)

---

ÉNONCÉ. — On sait que le cercle osculateur en un point quelconque  $A$  d'une parabole coupe cette courbe en un second point  $B$ ; démontrer :

1° Que la droite  $AB$  et toutes les droites analogues sont tangentes à une même parabole;

2° Que le lieu géométrique des milieux des cordes telles que  $AB$  est une parabole.

*Lemme.* — Si un cercle coupe une section conique en quatre points  $A, B, C, D$ , les bissectrices des angles que font entre eux deux côtés opposés du quadrilatère de ces quatre points sont parallèles aux axes de la courbe. (La démonstration de ce théorème se trouve dans les *Annales de Mathématiques de Gergonne.*)

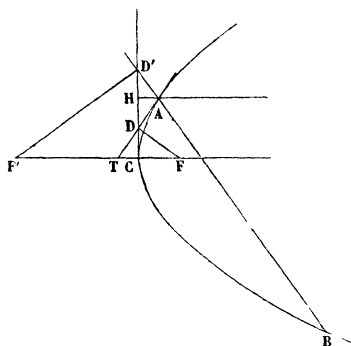
*Corollaire.* — Supposons que les deux points  $C$  et  $D$  se rapprochent du point  $A$  jusqu'à coïncider avec lui : le cercle sera osculateur à la conique, l'angle des côtés  $AB, CD$  deviendra l'angle de  $AB$  avec la tangente  $AT$ , et, d'après

le théorème précédent, les bissectrices de cet angle devront être parallèles aux axes de la conique.

*Démonstration des deux théorèmes énoncés.*

1<sup>o</sup> Menons la tangente au sommet C de la parabole (fig. 1), et désignons par D, H et D' les points où elle

FIG. 1.

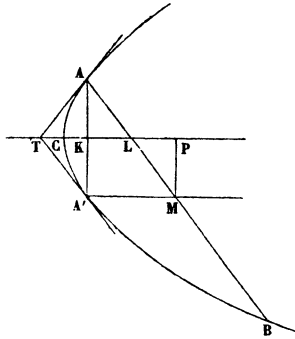


rencontre la tangente AT, le diamètre AH du point A, et la corde AB. En D' élevons une perpendiculaire à AB, et soit F' son point d'intersection avec l'axe. Joignons encore FD et remarquons que cette droite est perpendiculaire à AT. AH étant une bissectrice de l'angle DAD' (d'après le lemme), l'égalité des angles DAH, D'AH en résulte; mais ces angles sont respectivement égaux aux angles CDF, CD'F', car ils ont deux à deux leurs côtés perpendiculaires et dirigés dans le même sens. Donc les angles CDF, CD'F' sont aussi égaux, et les triangles rectangles DCF, D'CF' sont semblables. Mais  $CD = DH$  d'après une propriété de la parabole, et  $DH = D'H$ , parce que le triangle DAD' est isocèle; donc  $CD' = 3CD$ , et comme les triangles DCF, D'CF' sont semblables, CF' sera aussi égal à  $3CF$ . Le point F' est donc un point fixe, et l'on

voit alors que toutes les droites telles que  $AB$  sont tangentes à une même parabole dont  $F'$  est le foyer et  $C$  le sommet. Le paramètre de cette parabole est triple de celui de la parabole donnée.

2° Par le point  $T$  (*fig. 2*), où la tangente en  $A$  ren-

FIG. 2.



contre l'axe, menons la seconde tangente  $TA'$  à la parabole.  $A$  et  $A'$  sont deux points symétriques par rapport à l'axe, et, d'après le lemme,  $TA'$  est une parallèle à  $AB$ . Le milieu  $M$  de la corde  $AB$  se trouvera donc au point d'intersection de cette corde avec le diamètre du point  $A'$ . Appelons  $K$  et  $L$  les points où  $AA'$  et  $AB$  rencontrent l'axe. La perpendiculaire  $MP$ , abaissée du point  $M$  sur l'axe, est égale à  $A'K$  et par suite à  $AK$  : on en conclut que les longueurs  $KL$ ,  $LP$  sont aussi égales, et comme, dans le triangle isocèle  $TAL$ ,  $KL = TK = 2CK$ , il en résulte que  $CP = 5CK$ . Alors

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AK}^2}{5CK} = \text{constante.}$$

Le lieu du point  $M$  est une parabole ayant encore même axe et même sommet que la parabole donnée, mais dont le paramètre est cinq fois moindre.