

LEMASNE

Solution de la question 652

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 368-370

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__368_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 652

(voir page 190);

PAR M. LEMASNE,

Élève du lycée de Vendôme (classe de M. Jaufroid).

Soient P et P' deux polyèdres convexes semblables et semblablement placés, le premier intérieur au second. Prenons sur chaque face de P' un point et joignons-le aux sommets de la face homologue du polyèdre P. Nous formerons ainsi un polyèdre Q, à faces triangulaires, inscrit dans le polyèdre P' et circonscrit au polyèdre P. Soit Q' un quatrième polyèdre formé en joignant un point pris sur chaque face de P aux sommets de la face homologue de P'. En désignant par P, P', Q, Q', les volumes des quatre polyèdres, on aura

$$Q = \sqrt[3]{P^2 P'}, \quad Q' = \sqrt[3]{P P'^2},$$

d'où l'on déduira

$$QQ' = PP' \quad \text{et} \quad \frac{Q}{Q'} = \sqrt{\frac{P}{P'}}.$$

Les polyèdres P' et P étant semblables et semblablement placés, et le polyèdre P étant intérieur au polyèdre P', les droites qui joignent les sommets homologues concourent au centre de similitude, qui est intérieur aux deux polyèdres.

Soient H et h les distances du centre de similitude à deux faces homologues, on a

$$\frac{H}{h} = \sqrt{\frac{P'}{P}}.$$

Ce rapport est constant, ainsi que les suivants :

$$\frac{H-h}{H}, \quad \frac{H-h}{h}.$$

Cela posé, le volume Q est égal au volume P , plus la somme des pyramides ayant respectivement pour bases les faces de P et leurs sommets sur les faces de P' , somme que je représente par S .

Soit A l'une de ces pyramides, et A' la pyramide ayant pour sommet le centre de similitude et même base que la pyramide A . On aura

$$\frac{A}{A'} = \frac{H-h}{h}.$$

Le second membre étant constant, si on représente par B et B' , C et C' , ..., les autres pyramides analogues, on aura

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \dots = \frac{H-h}{h} = \frac{S}{P},$$

puisque l'on a

$$P = A' + B' + C' + \dots,$$

d'où

$$S = P \cdot \frac{H-h}{h},$$

et par suite

$$Q = P + P \cdot \frac{H-h}{h} = P \cdot \frac{H}{h} = \sqrt[3]{P^2 P'}.$$

Le volume Q' est égal au volume P' , moins la somme des pyramides ayant respectivement pour bases les faces de P' , et leurs sommets sur les faces de P ; je représente cette somme par S' .

Soit M une de ces pyramides, et M' la pyramide ayant pour sommet le centre de similitude et même base que M .

On aura

$$\frac{M}{M'} = \frac{H - h}{H}.$$

Le second membre étant constant, si on représente par N et N', R et R', ..., les autres pyramides analogues, on aura

$$\frac{M}{M'} = \frac{N}{N'} = \frac{R}{R'} = \dots = \frac{H - h}{H} = \frac{S'}{P'},$$

puisque l'on a

$$P' = M' + N' + R' + \dots,$$

d'où

$$S' = P' \cdot \frac{H - h}{H},$$

et par suite

$$Q' = P' - P' \cdot \frac{H - h}{H} = P' \cdot \frac{h}{H} = \sqrt[3]{PP'^2}.$$

On déduit immédiatement des valeurs de Q et de Q'

$$QQ' = PP' \quad \text{et} \quad \frac{Q}{Q'} = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}.$$

Note. — La même question a été résolue, à peu près de la même manière, par MM. Bardelli, de Milan; Moggi, de Tortone; Demmler, du lycée de Rouen (classe de M. Vincent).

M. Laval, élève du lycée de Lyon, commence par démontrer les deux dernières égalités en faisant voir d'abord qu'on a, k désignant le rapport de similitude des deux polyèdres P et P',

$$Q = \frac{P}{k}, \quad Q' = P'k;$$

il en déduit ensuite les deux premières égalités.