

Solution de la question 288

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 343-345

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_343_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 288

(voir t. XIII, p. 294);

PAR UN ABONNÉ.

Lorsque plusieurs surfaces du second ordre Σ sont circonscrites à une surface du même ordre S , tout plan cyclique de S coupe les surfaces Σ suivant des coniques dont les focales passent toutes par deux mêmes points, qui sont réels ou imaginaires suivant que le cercle d'intersection de S et du plan considéré est imaginaire ou réel.

(GROS.)

En prenant pour origine le centre d'un cercle tracé sur la surface S , pour plan des xy le plan de ce cercle, et pour plan des xz le plan principal perpendiculaire aux

(*) Ou plutôt de Tartaglia. Voyez la savante Notice insérée, par le regrettable M. Terquem, au tome XV des *Nouvelles Annales*.

(**) Je mets de côté, bien entendu, le cas où l'équation (1) aurait des racines égales.

plans cycliques, l'équation de cette surface S est

$$x^2 + y^2 + Az^2 + 2Bxz + 2Cz + D = 0.$$

Par suite, la surface Σ est représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + Az^2 + 2Bxz + 2Cz + D + \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2 = 0;$$

la section σ , de cette surface par le plan des xy , a pour équation

$$x^2 + y^2 + D + \lambda(\alpha x + \beta y + \delta)^2 = 0.$$

Si l'on prend sur l'axe Oz deux points F et F', dont les z soient $\pm \sqrt{D}$, la distance de l'un de ces points à un point quelconque de la courbe σ est une fonction rationnelle de x et de y ; donc la focale de cette courbe passe par les points F et F'.

Le cône circonscrit à S ayant son sommet en F est de révolution, puisque son sommet est situé sur la focale de sa base. On voit par là que si le cercle se déplace parallèlement à lui-même, les points F et F' décrivent le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à la surface S. On sait que ce lieu est une conique homofocale à la section C de la surface S par le plan principal perpendiculaire aux plans cycliques.

La courbe C rencontre l'axe des x en deux points E et E' dont les x sont $\pm \sqrt{-D}$, par conséquent les points F et F' sont réels quand les points E et E' sont imaginaires, et inversement.

Si l'on prend sur l'axe Ox deux points e, e' dont les x soient $\pm \sqrt{D}$, ces points appartiennent à la courbe supplémentaire (*) de C relativement à la direction Ox . On

(*) M. Poncelet a appelé *coniques supplémentaires*, relativement à la direction Oy , les coniques représentées par les équations

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

voit par là que la courbe des points F et F' s'obtient en faisant tourner la corde ee' de 90 degrés, d'où l'on conclut qu'étant données deux coniques supplémentaires relativement à une direction quelconque, si l'on fait tourner d'un angle droit les ordonnées de l'une on obtient une courbe homofocale à l'autre.

Note du Rédacteur. — MM. Cremona et Combescure nous ont envoyé des démonstrations du même théorème, très-ingénieuses, mais un peu détournées : nous avons préféré la précédente, qui est plus directe. En 1860, M. Chasles, dans ses *Leçons sur les courbes homofocales*, a démontré le théorème suivant : *Tous les cônes de révolution de même sommet ont pour bases, sur un plan quelconque, des coniques qui ont toutes un double contact avec un même cercle imaginaire.*

Il est aisé de voir que la proposition qui fait le sujet de cet article n'est que la réciproque de ce théorème; en effet, les surfaces Σ étant circonscrites à la surface S , les sections des surfaces Σ par un plan quelconque ont un double contact avec la section de la surface S par le même plan.

telles, que le rapport des ordonnées correspondant à une même abscisse est $\sqrt{-1}$.
