

EUGÈNE BELTRAMI

Remarques au sujet de la question 654

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 302-307

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_302_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUES AU SUJET DE LA QUESTION 654;

PAR M. EUGÈNE BELTRAMI.

L'énoncé de cette question est le suivant :

Démontrer que, si $\varphi(2\omega) = \varphi(\omega) \cdot \cos \omega$, on aura
$$\varphi(\omega) = \varphi(0) \cdot \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

La solution indiquée dans cet énoncé n'est pas, à beaucoup près, la plus générale que comporte la question. C'est ce qui ressortira de l'analyse suivante, dans laquelle je supposerai d'abord, pour plus de clarté, que la variable ω se maintienne toujours réelle et positive.

Si l'on multiplie l'équation proposée par $2 \sin \omega$, qu'on mette le résultat sous la forme

$$2 \frac{\varphi(2\omega)}{\sin 2\omega} = \frac{\varphi(\omega)}{\sin \omega},$$

•

et qu'on pose

$$(1) \quad \frac{\varphi(\omega)}{\sin \omega} = \psi(\omega),$$

on aura à résoudre l'équation suivante, plus simple que la proposée,

$$(2) \quad 2\psi(2\omega) = \psi(\omega).$$

En changeant successivement dans celle-ci ω en 2ω , $4\omega, \dots, 2^{m-1}\omega$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\psi(4\omega) &= \psi(2\omega), \\ 2\psi(8\omega) &= \psi(4\omega), \\ &\dots\dots\dots, \\ 2\psi(2^m\omega) &= \psi(2^{m-1}\omega), \end{aligned}$$

et, en multipliant toutes ces équations entre elles et avec l'équation (2), il vient

$$(3) \quad 2^m \psi(2^m \omega) = \psi(\omega)$$

Ici m est un nombre entier et positif; mais si l'on remplace dans cette formule ω par $2^{-n}\omega$, où n est un nombre entier et positif moindre que m , on trouve

$$2^m \psi(2^{m-n}\omega) = \psi(2^{-n}\omega);$$

d'un autre côté, en changeant dans la même formule m en $m - n$, il résulte

$$2^{m-n} \psi(2^{m-n}\omega) = \psi(\omega):$$

donc l'équation (3) subsiste pour toute valeur entière, positive ou négative de m .

D'après cette même équation (3), la valeur de la fonction $2^m \psi(2^m \omega)$ est toujours égale, tant que m est un nombre entier, à celle que cette fonction reçoit pour $m = 0$. Par suite, la valeur générale de cette fonction, c'est-à-dire

celle qui répond à une valeur quelconque rationnelle ou irrationnelle de m , que je désignerai par μ , doit se réduire à $\psi(\omega)$ pour toute valeur entière de μ . Je pose donc

$$2^\mu \psi(2^\mu \omega) = \psi(\omega) \cdot \cos 2h\pi\mu + F(\mu, \omega) \cdot \sin h\pi\mu,$$

où h et k sont deux nombres entiers quelconques, et où $F(\mu, \omega)$ est une fonction qui ne devient pas infinie pour des valeurs entières de μ . De cette équation, en faisant $\omega = 1$, on tire

$$2^\mu \psi(2^\mu) = \psi(1) \cos 2h\pi\mu + F(\mu) \cdot \sin h\pi\mu,$$

où l'on a écrit $F(\mu)$ à la place de $F(\mu, 1)$. Enfin, en posant

$$2^\mu = \omega,$$

d'où

$$\mu = \frac{\log \omega}{\log 2},$$

et écrivant, d'après l'équation (1), $\frac{\varphi(1)}{\sin 1}$ à la place de $\psi(1)$, on a

$$\psi(\omega) = \frac{\varphi(1)}{\omega \sin 1} \cos \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} + F_1(\omega) \cdot \sin \frac{h\pi \log \omega}{\log 2},$$

où

$$F_1(\omega) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{\log \omega}{\log 2}\right).$$

La fonction $F_1(\omega)$ n'est point arbitraire. En effet, si, dans l'équation précédente, on change ω en 2ω , on obtient

$$2\psi(2\omega) = \frac{\varphi(1)}{\omega \sin 1} \cos \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} + 2F_1(2\omega) \cdot \sin \frac{h\pi \log \omega}{\log 2} (-1)^k,$$

et par suite, d'après l'équation (2),

$$2F_1(2\omega) = (-1)^k \cdot F_1(\omega).$$

Si donc on prend pour k un nombre pair $2k$, on aura,

pour $\psi(\omega)$, la valeur

$$(5) \quad \psi(\omega) = \frac{\varphi(1)}{\omega \sin 1} \cdot \cos \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} + F_1(\omega) \cdot \sin \frac{2k\pi \log \omega}{\log 2},$$

et pour $F_1(\omega)$, l'équation

$$(6) \quad 2F_1(2\omega) = F_1(\omega).$$

Cette dernière équation, étant absolument de même forme que l'équation (2), donnera, de la même manière,

$$F_1(\omega) = \frac{F_1(1)}{\omega \sin 1} \cos \frac{2h'\pi \log \omega}{\log 2} + F_2(\omega) \cdot \sin \frac{2k'\pi \log \omega}{\log 2},$$

et, pour la fonction $F_2(\omega)$, on aura de nouveau

$$F_2(\omega) = \frac{F_2(1)}{\omega \sin 1} \cdot \cos \frac{2h''\pi \log \omega}{\log 2} + F_3(\omega) \cdot \sin \frac{2k''\pi \log \omega}{\log 2};$$

et ainsi de suite.

En substituant successivement ces valeurs les unes dans les autres et dans les équations (5) et (2), on trouvera enfin

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \frac{\sin \omega}{\omega \sin 1} \\ &\times \left[\varphi(1) \cos \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} + F_1(1) \sin \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} \cos \frac{2h'\pi \log \omega}{\log 2} \right. \\ &\quad \left. + F_2(1) \sin \frac{2k\pi \log \omega}{\log 2} \sin \frac{2k'\pi \log \omega}{\log 2} \cos \frac{2h''\pi \log \omega}{\log 2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Or, on voit assez clairement que l'ensemble des termes renfermés dans les parenthèses, à raison de la valeur entièrement arbitraire qu'on peut attribuer à chacune des constantes

$$\begin{array}{lll} \varphi(1), & F_1(1), & F_2(1), \dots, \\ h, & h', & h'', \dots, \\ k, & k', & k'', \dots, \end{array}$$

dont le nombre est indéterminé, peut être censé représenter une fonction quelconque des deux quantités

$$\sin \frac{2\pi \log \omega}{\log 2}, \quad \cos \frac{2\pi \log \omega}{\log 2},$$

ou même d'une seule d'entre elles, ce qui ne diminue point la généralité de cette fonction. En désignant donc celle-ci par

$$\Theta \left(\sin \frac{2\pi \log \omega}{\log 2}, \quad \cos \frac{2\pi \log \omega}{\log 2} \right),$$

on pourra poser

$$(7) \quad \varphi(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega} \Theta \left(\sin \frac{2\pi \log \omega}{\log 2}, \quad \cos \frac{2\pi \log \omega}{\log 2} \right).$$

D'après la manière dont cette formule a été obtenue, ω y entre comme une quantité positive; mais, si l'on se reporte à l'équation proposée, on voit facilement que la valeur de $\varphi(\omega)$ donnée ci-dessus ne cesse de satisfaire à cette équation quand on donne à ω des valeurs négatives ou même imaginaires; car les formules

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u, \quad \log uv = \log u + \log v$$

continuent d'avoir lieu quand u et v deviennent imaginaires, ainsi que l'a démontré Cauchy (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV), pourvu que l'on adopte des définitions convenables pour ces fonctions, quand la variable devient imaginaire. On peut donc regarder la formule (7) comme étant applicable à tous les cas.

Si l'on suppose que la fonction Θ se réduise à une simple constante arbitraire, et si l'on remarque que cette constante représente alors la valeur que la fonction reçoit pour $\omega = 0$, on obtient, comme cas particulier de la for-

mule (7), la solution indiquée dans l'énoncé de la question.

Note. — Pourquoi les méthodes employées (p. 285 et 286) n'ont-elles conduit qu'à une solution particulière ?
P.