

REYNAUD

**Note sur l'une des formes du reste
dans la série de Taylor**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 271-273

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_271_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR L'UNE DES FORMES DU RESTE DANS LA SÉRIE
DE TAYLOR;**

PAR M. REYNAUD,
Professeur au lycée de Toulouse.

Étant donnée une fonction quelconque de x , $f(x)$,
on pose l'égalité

$$f(x_1 + h) = f(x_1) + \frac{h}{1} f'(x_1) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_1) + \dots \\ + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x_1) + R,$$

où x_1 et $x_1 + h$ sont deux valeurs particulières de x , et
l'on se propose de déterminer, si c'est possible, la valeur
du terme complémentaire R .

On a

$$R = f(x_1 + h) - f(x_1) - \frac{h}{1} f'(x_1) \\ - \frac{h^2}{1.2} f''(x_1) - \dots - \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x_1).$$

Soit

$$y = \varphi(x) = f(x_1 + h) - f(x) - \frac{x_1 + h - x}{1} f'(x) \\ - \frac{(x_1 + h - x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) - \dots - \frac{(x_1 + h - x)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(x)$$

l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse, les axes étant rectangulaires. On voit immédiatement que pour $x = x_1 + h$, cette ordonnée est nulle si les dérivées successives de $f(x)$ prennent pour cette valeur de x des valeurs finies, et que pour $x = x_1$ l'ordonnée est égale à R . Si, pour cette dernière valeur de x , la fonction et ses dérivées ont des valeurs finies, la valeur de R est elle-même finie, positive ou négative. Soient (*)

$$OP = x_1, \quad OP' = x_1 + h \quad \text{et} \quad PM = R.$$

Le point M est au-dessus ou au-dessous de l'axe des x . Dans les deux cas, si la fonction $f(x)$ et sa dérivée sont finies et continues entre les limites x_1 et $x_1 + h$ de la variable, on pourra mener à l'arc AB , entre les points A et B , une tangente parallèle à sa corde AB , et l'abscisse du point de contact pourra être représentée par $x_1 + \theta h$, θ étant un nombre positif compris entre 0 et 1. Si R est positif, on a

$$R = \overline{PM} = \overline{PP'} \cdot \text{tang MP}'P = -h \text{tang MP}'x = -h \varphi'(x_1 + \theta h);$$

si R est négatif, on a de même

$$R = -PM = -h \text{tang MP}'P = -h \varphi'(x_1 + \theta h).$$

Or

$$\varphi'(x) = - \frac{(x_1 + h - x)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n+1)}(x),$$

et par suite

$$\varphi'(x_1 + \theta h) = - \frac{h^n (1 - \theta)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n+1)}(x);$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

substituant, on a la formule connue

$$R = \frac{h^{n+1} (1-\theta)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h).$$

Remarque. — On verra au moyen d'une figure que la démonstration se fait de la même manière, quel que soit le signe de l'accroissement h .
