

J. ROMAND

Concours d'agrégation pour les lycées, composition en mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 265-271

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_265_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'AGRÉGATION POUR LES LYCÉES,

Composition en Mécanique ;

PAR M. J. ROMAND,

Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

Dans un cylindre droit à base circulaire dont l'axe est horizontal, on place un prisme triangulaire droit qui touche le cylindre par deux de ses arêtes latérales. On demande dans quelles positions ce prisme demeurera en équilibre sous l'action de la pesanteur.

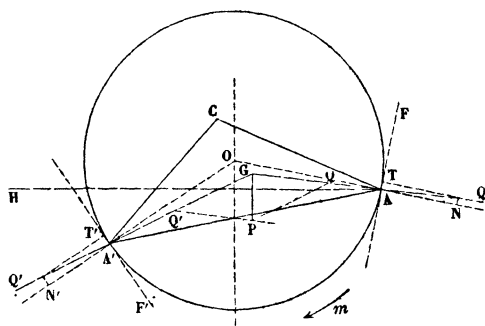
On aura égard au frottement et on déterminera les pressions exercées par le prisme dans ses positions extrêmes.

Nous admettrons : 1° que le prisme est homogène ou formé de filets prismatiques séparément homogènes, parallèles aux arêtes latérales ; 2° que la surface du cylindre et les arêtes du prisme sont telles, que les réactions du cylindre sur des éléments égaux de chaque arête en contact avec sa surface soient équivalentes à des forces égales normales à cette arête et parallèles entre elles.

Le prisme étant placé dans le cylindre, soit ACA' le triangle et O la circonférence suivant lesquels le système est coupé par un plan perpendiculaire aux arêtes passant par le centre de gravité G du prisme. D'après nos hypothèses, les réactions du cylindre se réduisent à deux forces appliquées en A et en A' , dont les directions sont comprises dans le plan de la section.

La position du triangle ACA' dans la circonférence O , par suite celle du prisme dans le cylindre, est déterminée par l'angle aigu que AA' fait avec une horizontale, par exemple avec AH ; cet angle $A'AH$ sera désigné par φ et

considéré comme positif ou négatif, selon qu'il se trouve au-dessous de AH ou au-dessus.



Abstraction faite du frottement, il n'y aurait qu'une seule position d'équilibre du prisme reposant sur le cylindre par les arêtes A et A'; le centre de gravité G serait sur la verticale du point O, et l'équilibre serait stable ou instable selon que G se trouverait au-dessous ou au-dessus de O. Eu égard au frottement, il y a une infinité de positions d'équilibre comprises entre deux positions extrêmes auxquelles répondent des valeurs limites de l'angle φ qu'il s'agit de calculer. Deux cas doivent être distingués :

1° Le centre de gravité G est dans le triangle AOA'.

Soient r le rayon du cylindre ou de la circonférence O;

α le côté AA' du triangle ACA';

β les angles en A, A' du triangle isocèle AOA' (cette donnée dépend de r et de α);

α, α' les angles en A, A' du triangle AGA' (ils déterminent la position de G dans le triangle ACA' et sont inférieurs à β dans le cas considéré);

P le poids du prisme;

f l'angle du frottement.

Décomposons le poids P en deux forces Q, Q' dirigées

suivant GA, GA' et transportons ces forces respectivement en A, A' . Décomposons encore Q, Q' appliquées aux points A, A' , en N, N' normales à la circonférence O , et T, T' tangentielles, qui seront de sens contraires. Les composantes tangentielles des réactions du cylindre sur le prisme, appliquées à celui-ci en A, A' , seront respectivement $N \tan f, N' \tan f$.

Si le centre de gravité G était sur la verticale du point O , l'équilibre subsisterait. Supposons que le prisme soit successivement placé sans impulsion dans des positions pour lesquelles G se trouve du même côté que A par rapport à cette verticale, il tendra à se mouvoir ou se mouvra effectivement dans le sens indiqué par la flèche m , en sorte que les frottements $N \tan f, N' \tan f$ seront de même sens que la force T ; la condition d'équilibre sera dans ce cas la relation

$$(1) \quad T' - T \leq (N + N') \tan f.$$

Regardons en effet pour un moment les frottements $N \tan f, N' \tan f$ comme des forces, pour ainsi dire *actives*, appliquées aux points A, A' du prisme, nous arriverons à la condition d'équilibre en considérant ce corps comme lié à l'axe du cylindre et assujéti à tourner seulement autour de cette droite fixe, qui remplacera en quelque sorte les résistances N, N' normales au cylindre. Pour l'équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des moments, par rapport à l'axe fixe, des quatre forces $T, T', N \tan f, N' \tan f$, soit nulle; ces moments sont $Tr, -T'r, Nr \tan f, N'r \tan f$, en prenant positivement celui de la force T , ce qui détermine le signe des autres: on a donc $T - T' + (N + N') \tan f = 0$, suppression faite du facteur commun r , ou bien $T' - T = (N + N') \tan f$. Enfin, comme $N \tan f, N' \tan f$ sont des frottements et non des forces effective-

ment appliquées au prisme, il est clair que la condition de notre problème est seulement que $T' - T$ ne surpasse pas $(N + N') \operatorname{tang} f$.

Au moyen des équations

$$N = Q \cos(\beta - \alpha), \quad T = Q \sin(\beta - \alpha),$$

$$N' = Q' \cos(\beta - \alpha'), \quad T' = Q' \sin(\beta - \alpha'),$$

la relation (1) se ramène à

$$\begin{aligned} & Q' [\sin(\beta - \alpha') - \cos(\beta - \alpha') \operatorname{tang} f] \\ & \leq Q [\sin(\beta - \alpha) + \cos(\beta - \alpha) \operatorname{tang} f], \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$Q' \sin(\beta - \alpha' - f) \leq Q \sin(\beta - \alpha + f),$$

car $\cos f$ est positif; plus simplement, on a

$$Q' n' \leq Q n,$$

en posant

$$\sin(\beta - \alpha' - f) = n' \quad \text{et} \quad \sin(\beta - \alpha + f) = n.$$

Remplaçant Q et Q' par leurs valeurs tirées des équations

$$(A) \quad \frac{Q}{\cos(\alpha' + \varphi)} = \frac{Q'}{\cos(\alpha - \varphi)} = \frac{P}{\sin(\alpha + \alpha')}$$

qui subsistent pour toutes les valeurs de φ , on trouve d'abord

$$n' \cos(\alpha - \varphi) \leq n \cos(\alpha' + \varphi),$$

car il est permis de supprimer le facteur commun positif

$\frac{P}{\sin(\alpha + \alpha')}$, puis

$$(n \sin \alpha' + n' \sin \alpha) \sin \varphi \leq (n \cos \alpha' - n' \cos \alpha) \cos \varphi.$$

Cette condition est nécessairement remplie par la valeur de φ qui répond à la position du prisme dans laquelle OG

est verticale; elle le sera aussi pour des directions de cette droite assez voisines de la verticale, répondant à des valeurs de φ un peu plus grandes; mais elle doit cesser de l'être pour des directions trop écartées de la verticale, c'est-à-dire pour de trop grandes valeurs de φ . D'après cela le coefficient de $\sin \varphi$ doit être positif, et on a par conséquent

$$\operatorname{tang} \varphi \leq \frac{n \cos \alpha' - n' \cos \alpha}{n \sin \alpha' + n' \sin \alpha},$$

d'où se déduira une des deux limites de φ .

Supposons maintenant que le prisme soit placé dans des positions pour lesquelles le centre de gravité G s'écarte de la verticale du point O du côté de A' , il tendra à se mouvoir ou se mouvra dans le sens opposé à la flèche m , et les frottements seront de même sens que la force T' ; la condition d'équilibre sera donc

$$(3) \quad T - T' \leq (N + N') \operatorname{tang} f,$$

ou bien

$$T' - T \geq (N + N') \operatorname{tang} (-f).$$

Cette relation ne différant de l'équation (1) que par l'inversion du signe de relation et par le changement de f en $-f$, si l'on remarque d'ailleurs qu'elle ne doit cesser d'avoir lieu qu'autant que φ prend des valeurs trop petites (φ décroît et peut devenir négatif quand OG s'écarte de la verticale du point O , dans le sens que l'on considère), on en conclut immédiatement

$$(4) \quad \operatorname{tang} \varphi \geq \frac{n_1 \cos \alpha' - n'_1 \cos \alpha}{n_1 \sin \alpha' + n'_1 \sin \alpha},$$

en posant

$$\sin (\beta - \alpha - f) = n_1 \quad \text{et} \quad \sin (\beta - \alpha' + f) = n'_1.$$

2° Le centre de gravité G est hors du triangle AOA' .

Un des angles α, α' au moins surpasse β ; mais nous nous contenterons de considérer le cas dans lequel on a en même temps $\alpha > \beta, \alpha' > \beta$.

Les composantes T, T' sont dirigées suivant $AF, A'F'$, et, quand le prisme tend à se mouvoir dans le sens indiqué par la flèche m , les frottements sont de même sens que T' ; la condition d'équilibre est donc

$$(5) \quad T - T' \leq (N + N') \operatorname{tang} f.$$

N, N' conservent les mêmes expressions que dans le premier cas, et la formule (A) ne change pas, mais on a

$$T = Q \sin (\alpha - \beta), \quad T' = Q' \sin (\alpha' - \beta).$$

D'après cela, et si l'on remarque que c'est quand l'angle φ diminue que le centre de gravité G s'écarte de la verticale du point O du côté de A , par suite que l'équilibre peut se trouver rompu, pour ainsi parler, dans le sens de la flèche m , on arrive à l'inégalité

$$(6) \quad \operatorname{tang} \varphi \geq \frac{n \cos \alpha' - n' \cos \alpha}{n \sin \alpha' + n' \sin \alpha},$$

n et n' représentant les mêmes sinus que dans la formule (2) dont celle-ci ne diffère que par l'inversion du signe de relation.

En considérant la rupture de l'équilibre dans le sens opposé à la flèche m , on trouve

$$(7) \quad T' - T \leq (N + N') \operatorname{tang} f,$$

qui a les mêmes rapports avec la relation (5) que (3) avec (1). On en déduirait donc

$$(8) \quad \operatorname{tang} \varphi \leq \frac{n_1 \cos \alpha' - n'_1 \cos \alpha}{n_1 \sin \alpha' + n'_1 \sin \alpha},$$

n_1 et n'_1 représentant les mêmes sinus que dans la formule (4).

Enfin, pour avoir les pressions exercées sur le cylindre par le prisme dans ses positions extrêmes d'équilibre, on tirera des formules

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{n \cos \alpha' - n' \cos \alpha}{n \sin \alpha' + n' \sin \alpha}, \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{n_1 \cos \alpha' - n'_1 \cos \alpha}{n_1 \sin \alpha' + n'_1 \sin \alpha}$$

les valeurs de φ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ qu'elles déterminent ;

on portera successivement ces valeurs de φ dans les formules (A) qui donneront des valeurs correspondantes pour Q et Q' , et il ne restera plus qu'à mettre celles-ci dans les équations

$$N = Q \cos (\beta - \alpha), \quad N' = Q' \cos (\beta - \alpha').$$