

DURRANDE

Mémoire sur la surface des ondes (suite)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 252-261

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__252_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE SUR LA SURFACE DES ONDES (suite)

(voir page 198);

PAR M. DURRANDE,
Professeur au lycée de Moulins.

IV.

D'une surface auxiliaire nommée SURFACE D'ÉLASTICITÉ.

Si du centre de l'ellipsoïde nous abaissons une perpendiculaire sur le plan tangent au point A, le pied P de cette perpendiculaire devra se trouver sur la tangente AT' perpendiculaire à AT. Dans le mouvement du plan tangent autour de OB, la droite OP, qui est perpendiculaire à OB, suit le mouvement du plan, et sa nouvelle position OP_1 , après le mouvement de 90° , est perpendiculaire au plan tangent à la surface des ondes au point A_1 . Cette droite OP_1 est perpendiculaire à OP et parallèle à AP, et A_1P_1 est parallèle à OP.

Donc :

Tous les plans tangents à la surface des ondes sont à des distances du centre respectivement égales aux distances des plans correspondants tangents à l'ellipsoïde.

De plus, si l'on remarque que la droite OB, autour de laquelle on fait tourner le plan tangent à l'ellipsoïde au point A, pour obtenir le plan tangent correspondant à la surface des ondes, est perpendiculaire au plan POA, on en conclura sans peine que ce triangle OPA, rectangle en P, tourne lui-même de 90° dans son plan autour de son sommet.

Puisque nous avons besoin de considérer les perpendiculaires OP sur les plans tangents à l'ellipsoïde, il est as-

sez naturel de s'occuper de la surface dont ces perpendiculaires sont les rayons vecteurs. Cette surface est connue sous le nom de *surface d'élasticité*, et sa considération ne sera pas inutile pour l'étude qui nous occupe.

Proposons-nous de trouver l'équation de cette surface.

Soient (ξ, η, ζ) les coordonnées du pied P de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, et (x', y', z') les coordonnées du point de contact de ce plan avec l'ellipsoïde; on a entre ces quantités les relations suivantes :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} + \frac{z'z}{c^2} = 1, \\ \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1, \\ \xi = \frac{\frac{x'}{a^2}}{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}, \\ \eta = \frac{\frac{y'}{b^2}}{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}, \\ \zeta = \frac{\frac{z'}{c^2}}{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}. \end{array} \right.$$

On en déduit facilement

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = \frac{1}{\left[\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4} \right]^2}$$

et

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}};$$

d'où enfin

$$(18) \quad (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2.$$

C'est l'équation de la surface d'élasticité.

Si le point A de l'ellipsoïde reste à une distance constante du centre, c'est-à-dire si l'on a

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2,$$

l'axe OA décrit le cône

$$(19) \quad (a^2 - R^2) \frac{x'^2}{a^2} + (b^2 - R^2) \frac{y'^2}{b^2} + (c^2 - R^2) \frac{z'^2}{c^2} = 0,$$

et, si l'on tient compte des relations (17), on voit que la perpendiculaire OP décrit le cône

$$(20) \quad (a^2 - R^2) a^2 \xi^2 + (b^2 - R^2) b^2 \eta^2 + (c^2 - R^2) c^2 \zeta^2 = 0.$$

Si c'est le point P que l'on assujettit à rester sur une sphère

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2,$$

la droite OP décrit le cône

$$(21) \quad (a^2 - R^2) \xi^2 + (b^2 - R^2) \eta^2 + (c^2 - R^2) \zeta^2,$$

et la droite OA se meut sur le cône

$$(22) \quad (a^2 - R^2) \frac{x'^2}{a^4} + (b^2 - R^2) \frac{y'^2}{b^4} + (c^2 - R^2) \frac{z'^2}{c^4} = 0,$$

et en remarquant que la droite OP_1 est parallèle à AP et égale à OP, on trouve facilement qu'elle décrit le cône supplémentaire du cône (21), c'est-à-dire

$$(23) \quad \frac{\xi'^2}{a^2 - R^2} + \frac{\eta'^2}{b^2 - R^2} + \frac{\zeta'^2}{c^2 - R^2} = 0,$$

dont nous aurons occasion de nous servir par la suite.

V.

Démonstration de deux propriétés remarquables de la surface des ondes.

Nous nous proposons d'étudier la forme de la surface des ondes autour des points singuliers. Je vais démontrer : 1° *qu'en chacun des points singuliers il existe une infinité de plans tangents ayant pour enveloppe un cône du second degré*; 2° *et de plus qu'à chaque point singulier correspond un plan tangent singulier ayant avec la surface une infinité de points de contact, tous situés sur un même cercle.*

La démonstration de ces deux propriétés est des plus simples quand on s'appuie sur ces deux théorèmes de M. Chasles :

Étant donnés deux plans fixes, si un point de leur intersection commune est pris pour le sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés se meuvent dans les deux plans fixes respectivement,

1° *Le plan de cet angle droit enveloppera un cône du second degré;*

2° *Les lignes focales de ce cône seront respectivement perpendiculaires aux deux plans fixes.*

Il est aisé de conclure de là :

1° *Que la normale au plan de l'angle droit, menée par son sommet, décrit un cône supplémentaire du premier;*

2° *Que le plan des sections circulaires de ce cône sont respectivement parallèles aux deux plans fixes.*

I. *Propriétés des points singuliers de la surface des ondes.* — Les cônes (19) et (20), quand on fait $R = b$,

deviennent deux plans

$$(24) \quad \begin{cases} x' = \pm \frac{a}{c} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} \cdot z', \\ \xi = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} \cdot \zeta. \end{cases}$$

Les plans contenus dans la première des équations (24) sont les plans des sections circulaires de l'ellipsoïde ; les plans contenus dans la seconde sont deux sections planes de la surface d'élasticité. Si l'on considère l'une des sections circulaires et la section correspondante de la surface d'élasticité, l'une est le lieu des demi-axes $OA = b$, l'autre le lieu des droites OP correspondantes. Tous les plans tangents à l'ellipsoïde aux divers points de la section circulaire viennent évidemment tous passer, après leur relèvement, par l'extrémité de la normale à cette section circulaire, c'est-à-dire sont tous tangents en l'un des points singuliers de la surface des ondes. Or, des deux tangentes rectangulaires qui déterminent la position d'un de ces plans, l'une, perpendiculaire à la normale, est parallèle au plan de la section circulaire, l'autre, constamment parallèle à OP , est dans un plan parallèle au plan lieu de OP . Donc, en vertu du théorème de M. Chasles, ces divers plans tangents enveloppent un cône du second degré.

II. *Propriété des plans tangents singuliers.*—Faisons $R = b$ dans les deux cônes (21) et (22), on aura

$$(25) \quad \begin{cases} \xi = \pm \zeta \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}, \\ x' = \pm \frac{a^2}{c^2} z' \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}. \end{cases}$$

Les deux plans contenus dans la première des équations

tions (25) sont les sections circulaires de la surface d'élasticité; les deux plans contenus dans la seconde sont deux sections elliptiques. Considérons comme précédemment l'une des sections de l'ellipsoïde et la section circulaire de la surface d'élasticité. Les plans tangents aux divers points de la section elliptique sont tous perpendiculaires au plan de la section circulaire lieu de OP; le plan POA est aussi perpendiculaire au plan de cette section, et la droite OB, autour de laquelle on doit faire tourner le plan tangent au point A, est dans le plan de cette section circulaire; donc le plan AOB enveloppe un cône du second degré, par suite la normale OA, décrit un cône du second degré, dont les plans des sections circulaires sont parallèles au plan lieu de OP et au plan lieu de OA. Ceci prouve que tous les plans tangents à l'ellipsoïde, situés à une distance b du centre, ne donnent qu'un seul plan tangent à la surface des ondes; mais le lieu des points de contact A_1 est un cercle, car la droite $P_1 A_1$ étant parallèle à OP, le lieu des points A_1 est une des sections circulaires.

Ainsi, aux quatre points singuliers coniques de la surface des ondes correspondent quatre plans tangents qui la touchent suivant des cercles.

VI.

Propriétés polaires de la surface des ondes.

On sait que le pôle d'un plan

$$mx + ny + pz = 1,$$

par rapport à une surface du second ordre

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1,$$

est le point dont les coordonnées (x_1, y_1, z_1) permettent

d'écrire l'équation du plan sous la forme

$$\alpha x_1 x + \beta y_1 y + \gamma z_1 z = 1;$$

de sorte qu'entre les coordonnées du point et les coefficients du plan on a les relations

$$m = \alpha x_1, \quad n = \beta y_1, \quad p = \gamma z_1,$$

et le plan se nomme le *plan polaire du point* (x_1, y_1, z_1) .

On sait également que, si le point (x_1, y_1, z_1) décrit une certaine surface S , le plan enveloppe une autre surface S' , et le plan tangent au point (x_1, y_1, z_1) de la surface S a précisément pour pôle le point de contact du plan tangent polaire du point (x_1, y_1, z_1) avec la surface S' . Aussi les deux surfaces S et S' sont-elles nommées *surfaces polaires réciproques*, par rapport à la surface du second degré donnée.

Ceci posé, je vais démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La surface polaire réciproque de l'une des nappes de la surface des ondes, relativement à l'ellipsoïde*

$$(26) \quad \frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} + \frac{z^2}{ab} = 1,$$

est la seconde nappe de la même surface des ondes, a, b, c ayant la même signification que précédemment.

La marche qu'il serait naturel de suivre, pour démontrer ce théorème, consisterait à prendre l'équation du plan tangent de la surface des ondes, à déterminer le pôle de ce plan par rapport à l'ellipsoïde (26) et à chercher le lieu de ces pôles en tenant compte de la condition que le plan polaire touche la surface des ondes. Mais les calculs qui se rapportent à cette marche sont très-long, et j'ai tourné la difficulté de la manière suivante :

Parmi tous les plans tangents à la surface des ondes, il

il y en a qui touchent une même sphère dont le rayon R est compris entre a et c . Ce sont tous les plans tangents qui sont à une même distance R du centre. Les points de contact de ces plans tangents et de cette sphère sont sur la conique sphérique

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2 \\ \frac{\xi^2}{a^2 - R^2} + \frac{\eta^2}{b^2 - R^2} + \frac{\zeta^2}{c^2 - R^2} = 0, \end{array} \right.$$

déterminée par l'intersection de la sphère et du cône lieu des droites OP_1 de longueur constante (voir § IV).

Il est clair qu'en donnant à R toutes les valeurs comprises entre a et c , tous les plans tangents aux diverses sphères R ayant leurs points de contact sur les coniques (27) seront tous les plans tangents à la surface des ondes. Nous sommes ainsi ramenés à chercher le lieu des pôles des divers plans tangents à une sphère ayant leurs points de contact sur une courbe donnée.

Tout plan tangent à la sphère R a pour équation

$$\xi' \xi + \eta' \eta + \zeta' \zeta = R^2;$$

le pôle (x_1, y_1, z_1) de ce plan, relativement à l'ellipsoïde (26), est tel, que l'on peut écrire l'équation de ce plan sous la forme

$$\frac{\xi x_1}{bc} + \frac{\eta y_1}{ac} + \frac{\zeta z_1}{ab} = 1.$$

Donc, entre les coordonnées du point de contact (ξ', η', ζ') et les coordonnées du pôle, on a les relations

$$\xi' = \frac{R^2 x_1}{bc}, \quad \eta' = \frac{R^2 y_1}{ac}, \quad \zeta' = \frac{R^2 z_1}{ab};$$

ξ', η', ζ' doivent d'ailleurs satisfaire aux équations (27), pour que le plan tangent à la sphère le soit aussi à la surface des ondes. Donc, si l'on substitue les valeurs de $\xi',$

η', ζ' en (x_1, y_1, z_1) dans les équations (27), on aura

$$(28) \quad \begin{cases} a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2 + c^2 z_1^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{R^2} = P'^2, \\ \frac{x_1^2}{b^2 c^2 - P'^2} + \frac{y_1^2}{a^2 c^2 - P'^2} + \frac{z_1^2}{a^2 b^2 - P'^2} = 0; \end{cases}$$

et l'on reconnaît facilement dans le groupe (28) les équations d'une conique ellipsoïdale de la surface des ondes. Or, il est encore aisé de voir que cette conique ellipsoïdale est celle qui correspond à la conique sphérique, intersection de la sphère R et de la surface des ondes.

Si R est compris entre a et b , tous les plans tangents qu'on obtient d'après les équations (27) sont tous les plans tangents à la nappe externe, et les équations (28) représentent tous les points de la nappe interne. Si R est compris entre b et c , c'est l'inverse qui a lieu. Donc le théorème est démontré.

La manière même dont nous avons démontré ce théorème remarquable conduit immédiatement aux conclusions suivantes :

1° *Tous les plans tangents communs à la surface des ondes et à une sphère ont leurs pôles sur la conique ellipsoïdale correspondant à la conique sphérique donnée par l'intersection de la surface et de la sphère.*

2° *Tous les plans tangents communs à la surface des ondes et à l'ellipsoïde*

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = P^2$$

ont leurs pôles sur la conique sphérique correspondant à la conique ellipsoïdale, intersection de la surface et de l'ellipsoïde donné.

Et par suite :

3° *Les deux courbes dont se compose la trace de la*

surface sur l'un des plans coordonnés sont polaires réciproques.

Et enfin voici une propriété assez remarquable :

4° Chaque point singulier de la surface est le pôle du plan tangent singulier correspondant, et chacun des points de la courbe de contact circulaire de celui-ci est le pôle de l'un des plans tangents au point singulier.

VII.

Propriété des axes optiques.

Les normales aux sections circulaires de l'ellipsoïde portent le nom d'*axes optiques* de la surface; on sait que ces droites passent par les points singuliers de la surface des ondes.

Si l'on remarque que les rayons vecteurs de la surface des ondes sont perpendiculaires aux sections diamétrales correspondantes de l'ellipsoïde, on en conclut sans peine que les angles qu'un rayon vecteur fait avec les axes optiques sont égaux aux angles que fait la section diamétrale de l'ellipsoïde avec les sections circulaires.

L'équation (5) du § I

$$\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin V \sin V'$$

donne donc le théorème suivant :

Le produit des sinus des angles que fait la direction d'un rayon vecteur de la surface des ondes avec les axes optiques de cette surface est proportionnel à la différence des carrés des inverses des deux rayons vecteurs qui ont cette même direction.

Ce théorème a une grande importance dans la théorie de la double réfraction.
