

JULES SABATIÉ

Note sur les imaginaires

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 206-209

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__206_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES IMAGINAIRES;

PAR M. JULES SABATIÉ.

Dans tous les Cours d'Algèbre on a soin de remarquer que les nombres négatifs n'ont point de logarithmes, et l'on renvoie aux livres d'analyse pour y montrer que l'on peut trouver pour les nombres négatifs des logarithmes réductibles à la forme générale des quantités imaginaires, $a + b\sqrt{-1}$.

En trigonométrie, il se présente aussi des fonctions impossibles, lorsqu'en étudiant les fonctions inverses on tombe sur des expressions de la forme

$$(1) \quad x = \arcsin(1 + k^2),$$

car il n'existe point d'arc dont le sinus soit plus grand que le rayon.

Je crois que, jusqu'ici, on s'est borné à dire que de tels arcs n'existent pas, négligeant de rechercher si de telles quantités ne sont point réductibles à la forme $a + b\sqrt{-1}$. Or, je vais démontrer qu'il en est ainsi.

Pour cela je ferai remarquer qu'une fonction quelconque telle que (1) peut rentrer dans la suivante

$$(2) \quad y = \arcsin \sqrt{1+x^2}$$

qui se prête mieux au calcul.

Or, si maintenant nous convenons d'étendre à ces fonctions les règles ordinaires de la différentiation (convention qui évidemment n'a rien que de permis, puisque ces mêmes règles ont été étendues aux fonctions imaginaires), l'expression (2) nous donne :

$$dy = \frac{d \cdot \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{-x^2}} = \frac{\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}}{x \sqrt{-1}} = -\sqrt{-1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

et par conséquent

$$y = C - \sqrt{-1} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

en traitant, selon l'usage, $\sqrt{-1}$ comme une constante. Or

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} + dx}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \int \frac{d(\sqrt{1+x^2} + x)}{x + \sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2}), \end{aligned}$$

de sorte que

$$y \text{ ou } \arcsin \sqrt{1+x^2} = C - \sqrt{-1} \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Reste à déterminer la constante arbitraire. Pour cela faisons $x = 0$ dans l'égalité précédente, et prenons, ce que nous sommes libres de faire, la valeur positive de $\sqrt{1}$; il vient ainsi

$$\arcsin 1 = C - \sqrt{-1} \log 1 = C,$$

d'où

$$C = 2k\varpi + \frac{\varpi}{2},$$

k étant, à l'ordinaire, un nombre positif, négatif ou nul. On a donc en définitive

$$(a) \quad \arcsin \sqrt{1+x^2} = \left(2k\varpi + \frac{\varpi}{2}\right) - \sqrt{-1} \, l(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Avant d'aller plus loin, il est bon de vérifier que cette formule n'est point en contradiction avec la formule des logarithmes imaginaires. Pour cela donnons à x la valeur zéro, dans l'expression (a), mais prenons la valeur négative de $\sqrt{-1}$; il vient

$$\arcsin(-1) = \left(2k\varpi + \frac{\varpi}{2}\right) - \sqrt{-1} \, l(-1),$$

mais on sait que

$$l(-1) = (2n\varpi + \varpi) \sqrt{-1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \arcsin(-1) &= \left(2k\varpi + \frac{\varpi}{2}\right) + (2n\varpi + \varpi) \\ &= 2(n+k)\varpi + \frac{3\varpi}{2}, \end{aligned}$$

résultat conforme à ce que l'on trouve directement.

Prenons encore la fonction

$$y = \arccos \sqrt{1+x^2}.$$

Par des calculs identiques aux précédents, on arrive à la formule suivante :

$$(b) \quad \arccos \sqrt{1+x^2} = 2k'\varpi + \sqrt{-1} \, l(x + \sqrt{1+x^2}),$$

de sorte qu'en ajoutant (a) et (b) on a

$$\text{arc sin } \sqrt{1+x^2} + \text{arc cos } \sqrt{1+x^2} = 2(k+k')\varpi + \frac{\varpi}{2},$$

comme dans les cas ordinaires.

En appliquant la même méthode aux fonctions suivantes

$$\text{arc séc } \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{arc coséc } \frac{1}{1+x^2},$$

on arrive à des formules analogues ; de telle sorte que les arcs dont les sinus ou cosinus sont plus grands que l'unité et les sécantes ou cosécantes moindres que 1 sont réductibles à la forme type $a + b\sqrt{-1}$.
