

TURQUAN

Sur la série de Taylor

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 19-22

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__19_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA SÉRIE DE TAYLOR ;

PAR M. TURQUAN,

Professeur au lycée de Tours.

Soient $f x$ une fonction quelconque de x , et x_1 et $x_1 + h$ deux valeurs particulières de x ; on pourra toujours poser

$$(A) \left\{ \begin{aligned} f(x_1 + h) &= f x_1 + \frac{h}{1} f' x_1 + \frac{h^2}{1.2} f'' x_1 + \dots \\ &\quad + \frac{h^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} f^{n-1} x_1 + h^n R, \end{aligned} \right.$$

$h^n R$ étant un terme complémentaire convenablement choisi et qu'il s'agit de déterminer.

L'égalité (A) peut être mise sous la forme

$$\frac{f(x_1 + h) - fx_1}{h} = f'x_1 + \frac{h}{1.2} f''x_1 + \dots$$

$$+ \frac{h^{n-2}}{1.2 \dots (n-1)} f^{n-1}x_1 + h^{n-1}R;$$

or l'équation $y = fx$ représente une courbe, fx_1 est l'ordonnée d'un certain point A de cette courbe, $f(x_1 + h)$ est l'ordonnée d'un autre point B, et $\frac{f(x_1 + h) - fx_1}{h}$ est

la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des x la corde qui joint ces deux points. Si donc $f(x)$ et sa dérivée sont finies et continues, c'est-à-dire si ces deux fonctions ne prennent aucune valeur infinie, et ne passent pas brusquement d'une valeur finie à une autre valeur finie, quand x varie depuis $x = x_1$ jusqu'à $x_1 + h$, on pourra mener à l'arc AB une tangente parallèle à sa corde, car cet arc n'aura aucun point dont l'ordonnée soit infinie, ni aucun point d'arrêt, ni aucun point de rupture, ni aucun point de rebroussement; et le point de l'arc AB par lequel on peut mener une tangente parallèle à la corde AB, a une abscisse comprise entre x_1 et $x_1 + h$ et qu'on peut représenter par $x_1 + \theta h$, θ étant un nombre positif compris entre 0 et 1. On aura donc

$$\frac{f(x_1 + h) - fx_1}{h} = f'(x_1 + \theta h),$$

et par suite

$$(B) \left\{ \begin{aligned} f'(x_1 + \theta h) &= f'x_1 + \frac{h}{1.2} f''x_1 + \frac{h^2}{1.2.3} f'''x_1 + \dots \\ &+ \frac{h^{n-2}}{1.2 \dots (n-1)} f^{n-1}x_1 + h^{n-1}R, \end{aligned} \right.$$

ou bien encore

$$\frac{f'(x_1 + \theta h) - f'x_1}{\theta h} = \frac{1}{1.2.\theta} f''x_1 + \frac{h}{1.2.3.\theta} f'''x_1 + \dots$$

$$+ \frac{h^{n-3}}{1.2.\dots(n-1)\theta} f^{n-1}x_1 + \frac{h^{n-2}}{\theta} R.$$

Et si $f'x$ et $f''x$ restent finies et continues pour toute valeur de x comprise entre x_1 et $x_1 + \theta h$, ou bien entre x_1 et $x_1 + h$, parce que θ peut être infiniment peu différent de 1, $\frac{f'(x_1 + \theta h) - f'x_1}{\theta h}$ sera égal à $f''(x_1 + \theta' h)$,

le produit $\theta' h$ étant un nombre positif compris entre 0 et 1 et que je représenterai par la seule lettre θ' . Ainsi

$$(C) \quad \left\{ \begin{aligned} f''(x_1 + \theta' h) &= \frac{1}{1.2.\theta} f''x_1 + \dots \\ &+ \frac{h^{n-3}}{1.2.\dots(n-1)\theta} f^{n-1}x_1 + \frac{h^{n-2}}{\theta} R. \end{aligned} \right.$$

Mais, comme cette égalité (C) doit avoir lieu aussi pour $h = 0$, il en résulte

$$f''x_1 = \frac{1}{1.2.\theta} f''x_1,$$

d'où

$$\frac{1}{1.2.\theta} = 1.$$

Donc, en supprimant l'accent de θ' ,

$$f''(x_1 + \theta h) = f''x_1 + \frac{h}{3} f'''x_1 + \dots$$

$$+ \frac{h^{n-3}}{1.3.\dots(n-1)} f^{n-1}x_1 + 1.2.h^{n-2} R.$$

En répétant les mêmes considérations et les mêmes

raisonnements, nous obtiendrons successivement :

$$\begin{aligned} f'''(x_1 + \theta h) &= f''' x_1 + \dots + 1.2.3. h^{n-3} R, \\ f^{iv}(x_1 + \theta h) &= f^{iv} x_1 + \dots + 1.2.3.4. h^{n-4} R, \\ &\dots\dots\dots \\ f^n(x_1 + \theta h) &= 1.2.3\dots n. R, \end{aligned}$$

d'où

$$R = \frac{f^n(x_1 + \theta h)}{1.2.3\dots n}.$$

Ainsi, pourvu que fx et ses dérivées jusqu'à celle du $n^{ième}$ ordre inclusivement soient finies et continues, pour toute valeur de x comprise entre x_1 et $x_1 + h$, on a

$$\begin{aligned} f(x_1 + h) &= fx_1 + \frac{h}{1} f' x_1 + \frac{h^2}{1.2} f'' x_1 + \dots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{n-1} x_1 + \frac{h^n}{1.2\dots(n-1)n} f^n(x_1 + \theta h). \end{aligned}$$