

L. FAURE

Remarques sur quelques théorèmes énoncés dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 16-19

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__16_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**REMARQUES SUR QUELQUES THÉORÈMES ÉNONCÉS
DANS LES NOUVELLES ANNALES;**

PAR M. L. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Question 609.

Cette question, déjà résolue par plusieurs élèves, est un cas particulier de celle-ci (*) : *Lorsqu'un triangle est conjugué à une conique, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale à la puissance de son centre relativement au cercle circonscrit au triangle.* Or, dans la question 609, le triangle RHC est conjugué au cercle décrit sur FF' comme diamètre. D'où l'on doit conclure que la tangente MT menée par le point M, milieu de FF', est égale à $\frac{FF'}{\sqrt{2}}$.

*Sur les deux premiers théorèmes de M. Paul Serret
(page 323).*

A la page 50 du tome XVII des *Nouvelles Annales*, j'ai énoncé le théorème suivant : *Si l'on décompose un polygone abcd... en triangles, en joignant ses sommets à un point arbitraire i de son plan, l'on aura, o étant un point fixe et k une constante :*

$$\frac{\overline{iab}^2}{oia.oab.obi} + \frac{\overline{ibc}^2}{oib.obc.oci} + \dots = k.$$

Le théorème I de l'endroit cité se déduit de celui-ci en

(*) *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 234.

supposant que les points $o, i, a, b, c, \dots$, soient sur un cercle de rayon R . Dans ce cas, en effet,

$$\frac{\overline{iab}^2}{oa \cdot ob \cdot obi} = \left(\frac{4R}{oi} \right)^2 \frac{iab}{oa^2 \cdot ob^2};$$

on a donc ce théorème : *Lorsqu'un polygone $abcd \dots$ est inscrit dans un cercle, si l'on prend sur la circonférence deux points o et i , on aura, k étant une constante,*

$$\frac{iab}{oa^2 \cdot ob^2} + \frac{ibc}{ob^2 \cdot oc^2} + \dots = k \cdot \overline{oi}^2.$$

Si enfin les points o et i se confondent, cette relation donne

$$\frac{ab}{oa \cdot ob} + \frac{bc}{ob \cdot oc} + \dots = 0,$$

c'est la première des relations indiquées, car, p étant la distance du point o au côté ab ,

$$\frac{ab}{oa \cdot ob} = \frac{1}{2R} \frac{ab}{p}.$$

Le théorème II est une conséquence du suivant, que j'ai démontré tome XVIII, page 181 : *Si l'on trace dans le plan d'un polygone une droite quelconque, la somme des triangles formés par deux côtés consécutifs du polygone et la droite arbitraire, divisés respectivement par le produit des distances de leurs sommets à une droite fixe, est constante.*

Soient A et B deux côtés consécutifs du polygone en question, c leur point de rencontre, a et b les points où ils sont coupés par la droite arbitraire I . Si l'on désigne par α, β, γ les distances des points a, b, c à la droite fixe, le théorème indiqué donne la relation

$$\sum \frac{abc}{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma} = k,$$

k étant une constante. Appelons o le point d'intersection de la droite fixe avec I , ω l'angle de ces deux droites, on a

$$\alpha.\beta = oa.ob.\overline{\sin^2 \omega}.$$

donc

$$\sum \frac{abc}{\gamma \, oa \, ob} = k \overline{\sin^2 \omega}.$$

Lorsque la droite fixe coïncide avec I , cette somme devient nulle, et le point o est un point quelconque de I .

Si l'on suppose que les côtés du polygone et la droite I touchent un même cercle de rayon r , on aura, en prenant le point o au point de contact de la droite I ,

$$oa = r \cot \frac{1}{2} a, \quad ob = r \cot \frac{1}{2} b,$$

$$abc = r^2 \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} c,$$

donc

$$\sum \frac{\cot \frac{1}{2} c}{\gamma} = 0.$$

On devra dans ces théorèmes tenir compte des signes des perpendiculaires.

Les différents théorèmes auxquels nous avons fait allusion dans ce qui précède sont susceptibles d'un grand nombre de corollaires ; nous en ajouterons quelques-uns dont on pourra chercher des démonstrations directes.

1° Si une tangente roule sur un cercle inscrit à un polygone, la somme des distances de chaque sommet à la tangente mobile, multipliées respectivement par le sinus de l'angle formé à ce sommet, est égale au rayon du cercle multiplié par la somme des sinus des angles du polygone.

Ce théorème montre que le centre du cercle inscrit à

un polygone est le centre de gravité d'un système de points matériels placés aux sommets du polygone et dont les poids seraient proportionnels aux sinus des angles formés par les côtés du polygone qui aboutissent à ces sommets.

2° Lorsqu'un polygone est circonscrit à un cercle, la somme des produits que l'on obtient en multipliant chaque côté par la distance de son point de contact à une tangente quelconque, est égale à la surface du polygone.

Ce théorème montre que le centre du cercle inscrit à un polygone est le centre de gravité d'un système de points matériels placés aux points de contact et dont les poids seraient représentés par les côtés correspondants.

3° Un polygone étant circonscrit à un cercle, on mène par son centre une transversale arbitraire. Cette transversale divise chaque côté en deux segments dont la somme des inverses est constante, les segments étant comptés à partir du point d'intersection avec la transversale. Etc.
