

PAINVIN

Théorème sur les coniques inscrites dans un quadrilatère

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 156-172

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__156_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME
SUR LES CONIQUES INSCRITES DANS UN QUADRILATÈRE;

PAR M. PAINVIN.

Soient S, S', S'', trois coniques inscrites dans un quadrilatère; on mène une tangente quelconque à la conique S; puis par les points P' et P'', Q' et Q'', où cette tangente rencontre respectivement les coniques S' et S'', on mène encore des tangentes à la première conique S; le lieu des intersections M de ces tangentes se compose de deux coniques inscrites dans le même quadrilatère.

Tel est l'énoncé du théorème que je vais démontrer.

1. Si A, B, C représentent des fonctions linéaires homogènes des coordonnées x, y, z d'un point, l'équation

$$A^2 = \frac{B^2}{\lambda} + \frac{C^2}{\mu},$$

où λ et μ sont deux constantes liées par la relation

$$\lambda + \mu = 1.$$

représente une conique inscrite dans un quadrilatère ayant pour diagonales les droites

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

et pour côtés les droites

$$(I) \quad \begin{cases} A + B + C = 0, \\ A + B - C = 0, \\ A - B + C = 0, \\ A - B - C = 0. \end{cases}$$

Cherchons, en effet, l'enveloppe de la courbe; en regardant λ comme un paramètre variable, on trouve

$$(A^2 + B^2 - C^2)^2 - 4A^2B^2 = 0,$$

ou

$$(A + B + C)(A + B - C)(A - B + C)(A - B - C) = 0.$$

2. Ceci posé, soient

$$(I) \quad \begin{cases} (S) & A^2 = \frac{B^2}{\lambda} + \frac{C^2}{\mu}, \quad \text{où } \lambda + \mu = 1, \\ (S') & A^2 = \frac{B^2}{h} + \frac{C^2}{k}, \quad \text{où } h + k = 1, \\ (S'') & A^2 = \frac{B^2}{h_1} + \frac{C^2}{k_1}, \quad \text{où } h_1 + k_1 = 1 \end{cases}$$

les équations des trois coniques S, S', S'' .

La droite

$$(2) \quad A = B \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\lambda}} + C \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\mu}},$$

où φ est un paramètre arbitraire, représente une tangente quelconque à la conique S ; car si l'on remplace A par cette valeur dans la première des équations (1), on trouve un carré parfait.

Un point quelconque P' de S' , et un point quelconque

P'' de S'' seront respectivement donnés par les équations

$$(3) \quad P' \begin{cases} \frac{B}{A} = \sqrt{h} \sin \alpha, \\ \frac{C}{A} = \sqrt{k} \cos \alpha, \end{cases} \quad P'' \begin{cases} \frac{B}{A} = \sqrt{h_1} \sin \alpha_1, \\ \frac{C}{A} = \sqrt{k_1} \cos \alpha_1 : \end{cases}$$

α, α_1 , sont deux constantes arbitraires; les équations des deux coniques sont évidemment vérifiées par les coordonnées des points P' et P'' .

Exprimons maintenant que ces deux points sont sur la tangente (2) à la conique S , ce qui conduit aux conditions

$$(4) \quad 1 = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\lambda}} \sin \alpha \sin \varphi + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\mu}} \cos \alpha \cos \varphi,$$

$$(5) \quad 1 = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{\lambda}} \sin \alpha_1 \sin \varphi + \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{\mu}} \cos \alpha_1 \cos \varphi.$$

Or, les équations de deux autres tangentes quelconques à la conique S seront

$$(6) \quad A = \frac{B}{\sqrt{\lambda}} \sin u + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \cos u,$$

$$(7) \quad A = \frac{B}{\sqrt{\lambda}} \sin u_1 + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \cos u_1.$$

Exprimons que la première passe par le point P' , et la seconde par le point P'' , nous aurons les deux nouvelles conditions

$$(8) \quad 1 = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\lambda}} \sin u \sin \alpha + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\mu}} \cos u \cos \alpha,$$

$$(9) \quad 1 = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{\lambda}} \sin u_1 \sin \alpha_1 + \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{\mu}} \cos u_1 \cos \alpha_1.$$

L'équation du lieu des points d'intersection des tangentes (6) et (7) s'obtiendra en éliminant les indéter-

minées α , α_1 , u , u_1 , et φ entre les six équations (4), (5), (6), (7), (8), (9).

3. Pour effectuer cette élimination, tirons de (4) et (8) les valeurs de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$, et ajoutons la somme des carrés; opérons de même sur α_1 , à l'aide des relations (5) et (9); on obtient ainsi les deux égalités suivantes qui ne renferment plus que φ , u et u_1 :

$$(10) \quad \cos^2 \left(\frac{\varphi - u}{2} \right) = \frac{\lambda}{h} \sin^2 \left(\frac{\varphi + u}{2} \right) + \frac{\mu}{k} \cos^2 \left(\frac{\varphi + u}{2} \right),$$

$$(11) \quad \cos^2 \left(\frac{\varphi - u_1}{2} \right) = \frac{\lambda}{h_1} \sin^2 \left(\frac{\varphi + u_1}{2} \right) + \frac{\mu}{k_1} \cos^2 \left(\frac{\varphi + u_1}{2} \right);$$

on a supprimé les facteurs $\left(\frac{\varphi - u}{2} \right)$, $\left(\frac{\varphi - u_1}{2} \right)$, qui, égaux à zéro, donneraient la tangente primitive (2); les lieux géométriques correspondants sont évidemment les coniques S' et S'' .

Maintenant éliminons φ entre les équations (10) et (11); pour cela, ayant égard aux formules

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}, \quad \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2},$$

j'écrirai d'abord les relations (10) et (11) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \cos(\varphi - u) = \left[-\frac{\lambda}{h} + \frac{\mu}{k} \right] \cos(\varphi + u) + \frac{\lambda}{h} + \frac{\mu}{k} - 1, \\ \cos(\varphi - u_1) = \left[-\frac{\lambda}{h_1} + \frac{\mu}{k_1} \right] \cos(\varphi + u_1) + \frac{\lambda}{h_1} + \frac{\mu}{k_1} - 1. \end{cases}$$

Développons les cosinus et ordonnons par rapport à $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, nous trouvons

$$(12) \quad \begin{cases} a \sin \varphi \sin u + b \cos \varphi \cos u = c, \\ a_1 \sin \varphi \sin u_1 + b_1 \cos \varphi \cos u_1 = c_1, \end{cases}$$

après avoir posé

$$(13) \quad \begin{cases} a = -\frac{\lambda}{h} + \frac{\mu}{k} + 1, & a_1 = -\frac{\lambda}{h_1} + \frac{\mu}{k_1} + 1, \\ b = \frac{\lambda}{h} - \frac{\mu}{k} + 1, & b_1 = \frac{\lambda}{h_1} - \frac{\mu}{k_1} + 1, \\ c = \frac{\lambda}{h} + \frac{\mu}{k} - 1, & c_1 = \frac{\lambda}{h_1} + \frac{\mu}{k_1} - 1. \end{cases}$$

Réolvons les équations (12) par rapport à $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, puis ajoutons la somme des carrés; on obtient la relation suivante entre u et u_1 :

$$(14) \quad \begin{cases} (ab_1 \sin u \cos u_1 - a_1 b \sin u_1 \cos u)^2 \\ = (a_1 c \sin u_1 - a c_1 \sin u)^2 + (b c_1 \cos u - b_1 c \cos u_1)^2. \end{cases}$$

Or, si l'on remarque que les produits ab_1 , $a_1 b$; ac_1 , $a_1 c$, ..., sont de la forme

$$(15) \quad \begin{cases} ab_1 = p + p_1, & ca_1 = n + n_1, & bc_1 = m + m_1, \\ a_1 b = p - p_1, & c_1 a = n - n_1, & b_1 c = m - m_1; \end{cases}$$

la relation (14) deviendra

$$\begin{aligned} & [p \sin(u - u_1) + p_1 \sin(u + u_1)]^2 \\ &= [n(\sin u_1 - \sin u) + n_1(\sin u + \sin u_1)]^2 \\ &+ [m(\cos u - \cos u_1) + m_1(\cos u + \cos u_1)]^2; \end{aligned}$$

ou enfin

$$(16) \quad \begin{cases} \left[p \sin \frac{u - u_1}{2} \cos \frac{u - u_1}{2} + p_1 \sin \frac{u + u_1}{2} \cos \frac{u + u_1}{2} \right]^2 \\ = \left[n \sin \frac{u - u_1}{2} \cos \frac{u + u_1}{2} - n_1 \sin \frac{u + u_1}{2} \cos \frac{u - u_1}{2} \right]^2 \\ + \left[m \sin \frac{u - u_1}{2} \sin \frac{u + u_1}{2} - m_1 \cos \frac{u - u_1}{2} \cos \frac{u + u_1}{2} \right]^2. \end{cases}$$

La question se trouve donc ramenée à l'élimination de u et u_1 entre les équations (6), (7) et (16).

En éliminant successivement les quantités C et B, les équations (6) et (7) se ramèneront à la forme

$$(17) \quad \begin{cases} A \sin \left(\frac{u + u_1}{2} \right) = \frac{B}{\sqrt{\lambda}} \cos \left(\frac{u - u_1}{2} \right), \\ A \cos \left(\frac{u + u_1}{2} \right) = \frac{C}{\sqrt{\mu}} \cos \left(\frac{u - u_1}{2} \right). \end{cases}$$

De là on déduit, sans difficulté,

$$(18) \quad \begin{cases} \sin \left(\frac{u + u_1}{2} \right) = \frac{B}{H \sqrt{\lambda}}; & \sin \left(\frac{u - u_1}{2} \right) = \frac{R}{H}, \\ \cos \left(\frac{u + u_1}{2} \right) = \frac{C}{H \sqrt{\mu}}; & \cos \left(\frac{u - u_1}{2} \right) = \frac{A}{H}, \end{cases}$$

R et H étant des quantités qui ne renferment aucune indéterminée, et définies par les égalités

$$(19) \quad \begin{cases} H^2 = \frac{B^2}{\lambda} + \frac{C^2}{\mu}, \\ R^2 = \frac{B^2}{\lambda} + \frac{C^2}{\mu} - A^2; \end{cases}$$

H et R entrent d'ailleurs dans les expressions (18) avec des signes quelconques complètement indépendants.

La substitution des valeurs (18) dans la relation (16) nous conduit à l'équation du lieu cherché, savoir :

$$(20) \quad \left[pAR + p_1 \frac{BC}{\sqrt{\lambda\mu}} \right]^2 = \left[n \frac{RC}{\sqrt{\mu}} - n_1 \frac{AB}{\sqrt{\lambda}} \right]^2 + \left[m \frac{RB}{\sqrt{\lambda}} - m_1 \frac{AC}{\sqrt{\mu}} \right]^2.$$

4. Développons cette dernière équation, en remplaçant R² par sa valeur (19), nous trouvons :

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & p^2 A^4 + m^2 \frac{B^4}{\lambda^2} + n^2 \frac{C^4}{\mu^2} + \frac{B^2 C^2}{\lambda \mu} (m^2 + n^2 - p^2) \\ & - \frac{A^2 C^2}{\mu} (p^2 + n^2 - m_1^2) - \frac{A^2 B^2}{\lambda} (p^2 - n_1^2 + m^2) \\ & + 2 \frac{RABC}{\sqrt{\lambda\mu}} (mm_1 + nn_1 + pp_1) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Or, je vais démontrer d'abord que le coefficient $(mm_1 + nn_1 + pp_1)$ de R est nul ; et je ferai voir ensuite que le premier membre de l'équation restante se décompose en deux facteurs de la forme

$$A^2 - \frac{B^2}{\varphi} - \frac{C^2}{\psi}.$$

5. Pour arriver simplement à ce résultat, je remarque que les six constantes $m, n, p; m_1, n_1, p_1$, dépendent, par l'intermédiaire des a, a_1, b, b_1, c, c_1 , de trois constantes arbitraires seulement, savoir λ, h et h_1 ; il est donc important de faire ressortir le plus possible cette dépendance.

Des égalités (15) je conclus

$$(22) \begin{cases} 2m = bc_1 + b_1c, & 2n = c\dot{a}_1 + c_1a, & 2p = ab_1 + a_1b, \\ 2m_1 = bc_1 - b_1c, & 2n_1 = ca_1 - c_1a, & 2p_1 = ab_1 - a_1b. \end{cases}$$

Or, les relations (13) donnent

$$(23) \begin{cases} a + b = 2, & a_1 + b_1 = 2, \\ b + c = 2 \frac{\lambda}{h}, & b_1 + c_1 = 2 \frac{\lambda}{h_1}, \\ a + c = 2 \frac{\mu}{k} = \frac{2(1-\lambda)}{1-h}, & a_1 + c_1 = 2 \frac{\mu}{k_1} = 2 \frac{1-\lambda}{1-h_1}. \end{cases}$$

Du premier groupe (23) on déduit

$$(24) \begin{cases} a = 2 - b, \\ \lambda = \frac{c^2 - b^2}{4(1-b)}; \end{cases}$$

et du second,

$$(25) \begin{cases} a_1 = 2 - b_1, \\ \lambda = \frac{c_1^2 - b_1^2}{4(1-b_1)}. \end{cases}$$

Posons alors

$$(26) \quad \begin{cases} b = 1 - \beta, \\ b_1 = 1 - \beta_1, \end{cases}$$

les égalités (24) et (25) nous donneront d'abord

$$(27) \quad \begin{cases} a = 1 + \beta, \\ a_1 = 1 + \beta_1, \end{cases}$$

puis, en égalant les valeurs de λ :

$$(28) \quad \beta c_1^2 - \beta_1 c^2 = (\beta - \beta_1)(1 - \beta\beta_1).$$

D'après cette notation, les valeurs des constantes m , n , p , m_1 , n_1 , p_1 , fournies par les équations (22), seront

$$(29) \quad \begin{cases} 2m = c_1 + c - (\beta c_1 + \beta_1 c), \\ 2m_1 = c_1 - c - (\beta c_1 - \beta_1 c), \\ 2n = c + c_1 + (\beta c_1 + \beta_1 c), \\ 2n_1 = -(c_1 - c) - (\beta c_1 - \beta_1 c), \\ p = 1 - \beta\beta_1, \\ p_1 = \beta - \beta_1; \end{cases}$$

et, en outre, la relation (28) pourra s'écrire

$$(30) \quad \beta c_1^2 - \beta_1 c^2 = pp_1.$$

6. Ces préparations étant effectuées, calculons d'abord la quantité $(mm_1 + nn_1 + pp_1)$. On a :

$$\begin{aligned} 4(mm_1 + nn_1 + pp_1) &= c_1^2 - c^2 + \beta^2 c_1^2 - \beta_1^2 c^2 \\ &\quad - 2(\beta c_1^2 - \beta_1 c^2) - c_1^2 + c^2 - \beta^2 c_1^2 + \beta_1^2 c^2 \\ &\quad - 2(\beta c_1^2 - \beta_1 c^2) + 4pp_1; \end{aligned}$$

le second membre est évidemment nul; donc

$$(29 \text{ bis}) \quad mm_1 + nn_1 + pp_1 = 0.$$

Si maintenant on pose

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^2 = X, \quad M = p^2 + m^2 - n_1^2, \\ \frac{B^2}{\lambda} = Y, \quad N = p^2 - m^2 + n_1^2, \\ \frac{C^2}{\mu} = Z, \quad P = p_1^2 - m^2 - n^2; \end{array} \right.$$

l'équation (21) prendra la forme

$$(32) \quad p^2 X^2 + m^2 Y^2 + n^2 Z^2 - MXY - NXZ - PYZ = 0.$$

La décomposition en carrés nous donnera, en premier lieu,

$$(33) \quad (2p^2 X - MY - NZ)^2 - M_1^2 Y^2 - N_1^2 Z^2 - 2P_1 YZ = 0,$$

après avoir posé

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1^2 = M^2 - 4p^2 m^2, \\ N_1^2 = N^2 - 4p^2 n^2, \\ P_1 = MN + 2p^2 P. \end{array} \right.$$

Continuant la décomposition, nous trouvons enfin

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2p^2 X - MY - NZ)^2 \\ - \left(M_1 Y + \frac{P_1}{M_1} Z \right)^2 + \frac{P_1^2 - M_1^2 N_1^2}{M_1^2} Z^2 = 0. \end{array} \right.$$

Or, il arrive ici que

$$(36) \quad P_1^2 = M_1^2 N_1^2.$$

On a, en effet, d'après les formules (34),

$$(37) \quad P_1^2 - M_1^2 N_1^2 = (MN + 2p^2 P)^2 - (M^2 - 4p^2 m^2)(N^2 - 4p^2 n^2);$$

en ayant égard aux valeurs des M, N, P (31), on aura

successivement :

$$\begin{aligned}
 \frac{P_1^2 - M_1^2 N_1^2}{4p^2} &= PMN + p^2 P^2 + m^2 N^2 + n^2 M^2 - 4p^2 m^2 n^2 \\
 &= p_1^2 MN + m^2 N^2 + n^2 M^2 - (m^2 + n^2) MN \\
 &\quad + p^2 (P^2 - 4m^2 n^2) \\
 &= p_1^2 MN + (M - N)(n^2 M - m^2 N) \\
 &\quad + p^2 (P^2 - 4m^2 n^2);
 \end{aligned}$$

et enfin

$$(38) \quad \frac{P_1^2 - M_1^2 N_1^2}{4p^2} = \left\{ \begin{array}{l} p^2 p_1^2 (p^2 + p_1^2) - p^2 p_1^2 (m^2 + m_1^2 + n^2 + n_1^2) \\ - p^2 (m^2 m_1^2 + n^2 n_1^2 - m^2 n_1^2 - m_1^2 n^2) \\ - p_1^2 (m^2 m_1^2 + n^2 n_1^2 - m^2 n^2 - m_1^2 n_1^2) \\ + (mm_1 + nn_1)^2 (m^2 + m_1^2 + n^2 + n_1^2) \\ - 2(mm_1 + nn_1)(mn + m_1 n_1)(mn_1 + m_1 n) \end{array} \right\}.$$

Or, les relations (29) et (30) nous donnent

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} mm_1 + nn_1 = -pp_1, \\ mn + m_1 n_1 = pcc_1, \\ mn_1 + m_1 n = -p_1 c r_1; \end{array} \right.$$

de là on conclut

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} m^2 m_1^2 + n^2 n_1^2 = p^2 p_1^2 - 2mm_1 nn_1, \\ m^2 n^2 + m_1^2 n_1^2 = p^2 c^2 c_1^2 - 2mm_1 nn_1, \\ m^2 n_1^2 + m_1^2 n^2 = p_1^2 c^2 c_1^2 - 2mm_1 nn_1, \\ (mm_1 + nn_1)(mn_1 + m_1 n)(mn + m_1 n_1) = p^2 p_1^2 c^2 c_1^2. \end{array} \right.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression (38), on constate immédiatement l'égalité annoncée, savoir

$$P_1^2 = M_1^2 N_1^2.$$

Si l'on a égard à cette dernière relation, l'équation (35) donne les deux suivantes, en remettant pour X, Y, Z

leurs valeurs (31),

$$A^2 = \frac{M - M_1}{2p^2} \cdot \frac{B^2}{\lambda} + \frac{N - N_1}{2p^2} \cdot \frac{C^2}{\mu},$$

$$A^2 = \frac{M + M_1}{2p^2} \cdot \frac{B^2}{\lambda} + \frac{N + N_1}{2p^2} \cdot \frac{C^2}{\mu};$$

équations qu'on peut écrire sous cette forme plus simple, en faisant usage des relations (34) :

$$(41) \quad \begin{cases} A^2 = \frac{2m^2}{\lambda(M + M_1)} \cdot B^2 + \frac{2n^2}{\mu(N + N_1)} \cdot C^2, \\ A^2 = \frac{2m^2}{\lambda(M - M_1)} \cdot B^2 + \frac{2n^2}{\mu(N - N_1)} \cdot C^2. \end{cases}$$

Ainsi se trouve démontrée la première partie du théorème énoncé : *le lieu géométrique se compose de deux coniques.*

Remarque. — Dans tous ces calculs, j'ai supposé $P_1 = +M_1N_1$; il suffit d'un peu d'attention pour voir que cette restriction n'influe aucunement sur les conséquences que je veux en tirer; les valeurs particulières de $m, n, p, \dots$, pourront seules indiquer si l'on doit prendre $P_1 = +M_1N_1$ ou $P_1 = -M_1N_1$.

7. J'ajouterai que les deux coniques (41) sont inscrites dans le quadrilatère auquel sont inscrites les coniques S, S', S'' .

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait pour la première conique

$$\frac{\lambda(M + M_1)}{2m^2} + \frac{\mu(N + N_1)}{2n^2} = 1,$$

et pour la seconde

$$\frac{\lambda(M - M_1)}{2m^2} + \frac{\mu(N - N_1)}{2n^2} = 1.$$

Or, ces deux conditions entraînent l'existence simultanée des deux relations

$$(42) \quad \begin{cases} \lambda n^2 M + \mu m^2 N - 2 m^2 n^2 = 0, \\ \lambda n^2 M_1 + \mu m^2 N_1 = 0; \end{cases}$$

nous allons vérifier ces deux égalités.

Je remarque d'abord que les équations (29) donnent

$$4mm_1 = -c^2 + c_1^2 + \beta^2 c_1^2 - \beta_1^2 c^2 - 2pp_1;$$

ou, en remplaçant c_1^2 par la valeur déduite de l'équation (30),

$$4mm_1\beta = -pp_1[c^2 - (1 - \beta)^2].$$

Mais, d'après les équations (24) et (26), on a

$$\lambda = \frac{c^2 - (1 - \beta)^2}{4\beta};$$

nous arrivons ainsi à la première des relations suivantes :

$$(43) \quad \begin{cases} \lambda pp_1 + mm_1 = 0, \\ \mu pp_1 + nn_1 = 0; \end{cases}$$

la seconde se déduit de la première en ayant égard aux égalités (39) et à la condition $\lambda + \mu = 1$. Multiplions ces dernières relations respectivement par μnm_1 , λnn_1 , et ajoutons, il vient

$$\lambda n^2 n_1^2 + \mu m^2 m_1^2 + \lambda \mu pp_1 (mm_1 + nn_1) = 0,$$

ou, d'après l'équation (29 bis),

$$(44) \quad \lambda n^2 n_1^2 + \mu m^2 m_1^2 = \lambda \mu p^2 p_1^2.$$

8. Ceci posé, la première des égalités (42) qu'il s'agit de vérifier devient, en remplaçant M, N, P par leurs valeurs (31),

$$p^2(\lambda n^2 + \mu m^2) - m^2 n^2 - (\lambda n^2 n_1^2 + \mu m^2 m_1^2) = 0;$$

ou, en vertu de la relation (44),

$$(45) \quad p^2(\lambda n^2 + \mu m^2) - m^2 n^2 - \lambda \mu p^2 p_1^2 = 0.$$

Substituons à λ et μ leurs valeurs (43), nous trouvons, réduction faite,

$$p(m_1 n + m n_1) + p_1(m n + m_1 n_1) = 0;$$

or, le premier membre est nul par suite des relations (39).

Passons à la seconde des égalités (42). Élevons au carré le premier membre et ayons égard aux relations (34) et (36), puis à la première des égalités (42) qui vient d'être vérifiée; on obtient

$$(\lambda n^2 M + \mu m^2 N)^2 - 4p^2 m^2 n^2 [\lambda n^2 + \mu m^2 + \lambda \mu (m^2 + n^2) - \lambda \mu p_1^2],$$

ou

$$4m^2 n^2 [m^2 n^2 - (\lambda n^2 + \mu m^2) p^2 + \lambda \mu p^2 p_1^2],$$

quantité évidemment nulle d'après l'égalité démontrée (45).

Ainsi se trouve complètement établi le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Soient S, S', S'' trois coniques inscrites dans un quadrilatère; on mène une tangente quelconque à la conique S; puis, par les points P' et P'', Q' et Q'', où cette tangente rencontre respectivement les coniques S' et S'', on mène encore des tangentes à la première conique S; le lieu des intersections de ces tangentes se compose de deux coniques inscrites dans le même quadrilatère.*

Je vais maintenant déduire de cette analyse plusieurs conséquences.

9. Si l'on suppose que la conique S'' coïncide avec la conique S', auquel cas on a

$$h = h_1, \quad k = k_1,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} m_1 &= 0, & M &= p^2 + m^2, & M_1 &= p^2 - m^2, \\ n_1 &= 0, & N &= p^2 + n^2, & N_1 &= p^2 - n^2, \\ p_1 &= 0, & P &= -(m^2 + n^2), & P_1 &= (p^2 - m^2)(p^2 - n^2); \end{aligned}$$

les deux coniques (41) se réduisent, l'une à la conique S, et l'autre à

$$A^2 = \frac{m^2}{\lambda p^2} B^2 + \frac{n^2}{\mu p^2} C^2;$$

d'où ce théorème, cas particulier du précédent :

THÉORÈME II. — *Si S et S' sont deux coniques inscrites dans un quadrilatère, et qu'on mène une tangente quelconque à S; puis, que par les points d'intersection de cette tangente avec la conique S' on mène des tangentes à la première conique S: le lieu des intersections de ces tangentes sera une conique inscrite dans le même quadrilatère.*

10. Considérons un système de coniques homofocales

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - c^2)} = 1;$$

si l'on pose

$$\frac{c}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \frac{c}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\mu}},$$

cette équation prend la forme

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{(-y^2)}{\mu} = c^2;$$

c'est-à-dire que des coniques homofocales sont toutes inscrites dans un même quadrilatère; les sommets de ce quadrilatère sont, comme il est facile de s'en convaincre, les deux foyers réels et les deux foyers imaginaires de la conique; deux des diagonales de ce quadrilatère sont les

axes communs à toutes ces courbes, la troisième diagonale ($c = 0$) est à l'infini. Le théorème que je viens de démontrer est donc applicable à ce cas particulier, et nous pourrons dire :

THÉORÈME III. — *Trois coniques S, S', S'' étant homofocales, si l'on mène une tangente quelconque à la conique S, et que, par les points d'intersection de cette tangente avec les coniques S' et S'', on mène de nouvelles tangentes à la première, le lieu des intersections de ces tangentes se composera de deux coniques homofocales avec les premières.*

On aurait un théorème semblable pour le cas encore plus particulier de trois cercles concentriques.

11. Dans les calculs précédents, les lettres A, B, C représentent, comme nous l'avons dit, des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z ; $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ étant les coordonnées d'un point. Supposons actuellement que $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$, au

lieu de désigner les coordonnées d'un point, soient les paramètres ou les coordonnées d'une droite. En d'autres termes, au lieu d'interpréter les calculs que nous venons de faire dans le système des coordonnées-point, interprétons-les dans le système des coordonnées tangentielles.

Dans ce dernier système :

Les équations (1) représenteront trois coniques circonscrites à un même quadrilatère dont les sommets seront les points représentés par les équations (1); l'équation (2) représente un point quelconque I situé sur la conique S; les équations (3) donnent les coordonnées des tangentes respectives T' et T'' aux coniques S' et S''; les relations (4) et (5) sont les conditions pour que les tangentes T' et T'' passent par le point I; les équations (6) et (7) repré-

sentent deux points quelconques M' et M'' situés sur la conique S ; les relations (8) et (9) expriment : la première, que le point M' est sur la tangente IT' ; la seconde, que le point M'' est sur la tangente IT'' . Les équations (6) et (7) donnent donc les coordonnées d'une droite passant par les points d'intersection avec la conique S des tangentes menées respectivement à S' et S'' d'un point quelconque I de S . Par conséquent l'équation (21), qui est une relation entre les coordonnées d'une quelconque de ces droites, en sera la courbe enveloppe, et cette courbe enveloppe (21) ou (41) se composera de deux coniques circonscrites au même quadrilatère.

Nous sommes ainsi conduits au théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Trois coniques S, S', S'' étant circonscrites à un même quadrilatère, si d'un point quelconque I de S on mène des tangentes IT' et IT'' respectivement aux coniques S' et S'' , et que M' et M'' soient les intersections de ces tangentes avec la conique S , l'enveloppe des droites $M'M''$ se compose de deux coniques circonscrites au même quadrilatère.*

Ce dernier théorème est connu depuis longtemps. M. Poncelet l'a démontré analytiquement pour le cas de trois cercles ayant une corde commune (*Applications d'Analyse et de Géométrie*, p. 314 à 347), et l'a étendu au cas de trois coniques à l'aide des principes de la méthode projective.

12. Du premier des théorèmes que je viens de démontrer, on peut déduire plusieurs conséquences relatives à l'inscription des polygones. Je ne citerai que celle-ci :

THÉORÈME V. — *Soient $S, S_1, S_2, \dots, S_n$, $(n+1)$ coniques inscrites dans un même quadrilatère; imaginons un polygone $A_1 A_2 \dots A_n A$ dont les n premiers sommets $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont assujettis à rester respective-*

ment sur les n coniques $S_1, S_2, \dots, S_n$ et dont tous les côtés sont constamment tangents à la conique S ; si l'on déforme ce polygone en conservant toujours les mêmes conditions et le même mode de construction, le sommet libre A de ce polygone décrira une conique inscrite dans le même quadrilatère.

La déduction de cette propriété est facile. Considérons, par exemple, cinq coniques S, S_1, S_2, S_3, S_4 ; $A_1 A_3$ étant une tangente quelconque à S , le point de rencontre i des deux tangentes $A_1 i$ et $A_3 i$ décrira une conique inscrite dans le même quadrilatère, d'après le premier théorème. $A_3 A_2$ étant une tangente à S , et le point i se trouvant sur une conique également inscrite, le point de rencontre h des deux tangentes $i h$ et $A_2 h$ décrira aussi une conique inscrite dans le même quadrilatère. Enfin, $A_2 A_1$ étant une tangente à S , le point h se trouvant sur une conique inscrite, le point de rencontre A des deux tangentes $h A$ et $A_1 A$ décrira une conique inscrite. C'est ce qu'il fallait démontrer.
