

LÉON LHUILLIER

Solution de la question 639

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 149-151

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__149_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 639;

PAR M. LÉON LHUILLIER,

Elève à Nancy.

ÉNONCÉ. — *Trouver sur la surface d'un parabolôïde hyperbolique le lieu géométrique d'un point tel, que les deux génératrices rectilignes menées par ce point fassent un angle donné.*

Cas particulier où l'angle donné est droit.

Soient

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = \lambda, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{x}{\lambda},$$

et

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \mu, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{x}{\mu},$$

les équations de deux génératrices rectilignes menées par un point de la surface.

Si l'on représente par φ l'angle donné, et par a, b, a', b' les coefficients angulaires des projections de ces génératrices, la condition de l'énoncé se traduit par l'équation

$$\cos \varphi = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}.$$

Or, on a

$$a = -\frac{2\lambda}{\sqrt{p}}, \quad b = -\sqrt{\frac{p}{p'}}; \quad a' = \frac{2\mu}{\sqrt{p'}}, \quad b' = \sqrt{\frac{p}{p'}};$$

la condition devient donc

$$\cos \varphi = \frac{p' - p - 4\lambda\mu}{\sqrt{(4\lambda^2 + p + p')(4\mu^2 + p + p')}}.$$

ou

$$[16\lambda^2\mu^2 + 4(p+p')(\lambda^2 + \mu^2) + (p+p')^2]\cos^2\varphi = (4\lambda\mu + p - p')^2.$$

Substituant dans cette équation à λ et μ les valeurs

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} \text{ et } \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}}, \text{ il vient}$$

$$\begin{aligned} & \left[16 \left(\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} \right)^2 + 8(p+p') \left(\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} \right) + (p+p')^2 \right] \cos^2\varphi \\ & = \left[4 \left(\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} \right) + p - p' \right]^2. \end{aligned}$$

Cette dernière équation simplifiée en vertu de la relation $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = x$, qui est satisfaite pour tous les points du lieu, devient

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[16x^2 + 8(p+p') \left(x + \frac{2z^2}{p'} \right) + (p+p')^2 \right] \cos^2\varphi \\ & = (4x + p - p')^2. \end{aligned} \right.$$

Les points cherchés sont donc à l'intersection du paraboloides et du cylindre hyperbolique représenté par l'équation précédente.

Dans le cas particulier où l'angle donné φ est droit, l'équation (1) se réduit à $(4x + p - p') = 0$; elle représente un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloides, et qui coupe, par conséquent, la surface suivant une hyperbole. Si $p = p'$, ce plan devient le plan tangent au sommet; le lieu des points communs à ce plan et au paraboloides se forme des deux génératrices rectilignes menées par le sommet de la surface.

Dans tous les cas, le plan $4x + p - p' = 0$ est le lieu géométrique des sommets des trièdres trirectangles circonscrits au paraboloides. Il suffit, pour s'en assurer, d'ajouter, en tenant compte des relations qui expriment

que trois plans sont rectangulaires, les équations des trois plans tangents de la forme

$$4x \cos^2 \alpha + 4y \cos \alpha \cos \beta + 4z \cos \alpha \cos \gamma = p' \cos^2 \gamma - p \cos^2 \beta.$$

On trouve aisément $4x = p' - p$.
