

PROUHET

Analogies du triangle et du tétraèdre. Cercle des neuf points, sphère des douze points

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2 (1863), p. 132-138

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__132_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALOGIES DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE.
CERCLE DES NEUF POINTS, SPHÈRE DES DOUZE POINTS.

Triangle.

1. Soient ABC un triangle, α , β , γ les milieux des côtés BC , AC , AB , O le centre du cercle circonscrit. Menons $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ et prolongeons ces droites jusqu'en

A', B', C' de telle sorte que

$$OA' = 2O\alpha, \quad OB' = 2O\beta, \quad OC' = 2O\gamma.$$

Les deux triangles A' B' C' et ABC auront leurs côtés parallèles et seront égaux, mais inversement situés.

2. Si l'on fait sur le triangle A' B' C' la même opération que sur le triangle ABC, on retrouvera ce dernier triangle. Il y a donc entre ces deux triangles une sorte de réciprocité : nous dirons qu'ils sont *conjugués*.

3. Les mêmes lettres désignant les points homologues des deux triangles conjugués, O est le point de concours des hauteurs de A' B' C' et O' le point de concours des hauteurs de ABC.

4. Les triangles ABC, A' B' C', $\alpha\beta\gamma$ sont semblables deux à deux et ont respectivement pour centres de similitude :

ABC, A' B' C', le milieu M de OO' ;

ABC, $\alpha\beta\gamma$, le centre de gravité G de ABC ;

A' B' C', $\alpha\beta\gamma$, le point O centre du cercle circonscrit à ABC.

D'après un théorème connu, les points O, G, M sont en ligne droite ; mais O, M, O' sont aussi en ligne droite ; donc O, G, O' sont en ligne droite. Par conséquent :

Le centre du cercle circonscrit à un triangle, le centre de gravité et le point de concours des hauteurs sont trois points en ligne droite.

5. Le point O', considéré comme appartenant au triangle ABC, a pour homologue le point O dans le triangle $\alpha\beta\gamma$, car O' et O sont les points de concours des hauteurs dans ces deux triangles. Donc, puisque G est le centre de similitude et que le rapport de similitude est 2, on aura

$$O'G = 2OG.$$

6. Le point M, milieu de OO' , est le centre du cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$. En effet, de

$$OM = \frac{1}{2} OO', \quad OG = \frac{1}{3} OO',$$

on conclut

$$OG = \frac{2}{3} OM = \frac{2}{3} (OG + GM),$$

d'où

$$OG = 2GM.$$

Donc le point M est, dans le triangle $\alpha\beta\gamma$, l'homologue du point O dans le triangle ABC. Mais O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Donc, etc.

7. Le point M est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ égal au triangle $\alpha\beta\gamma$. Il en résulte que les six points $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sont sur un même cercle.

8. Les points α et α' étant homologues dans les deux triangles ABC et $A'B'C'$, la droite $\alpha\alpha'$ passe par le point M qui est son milieu. Mais si Ap est la perpendiculaire abaissée de A sur le côté BC, le triangle $\alpha'p\alpha$ étant rectangle en p, on aura

$$Mp = M\alpha = M\alpha',$$

et le point p sera encore sur la circonférence du numéro précédent. De là résulte que :

1° Les milieux α, β, γ des côtés d'un triangle ; 2° les milieux α', β', γ' des portions des hauteurs comprises entre les sommets et le point de concours des hauteurs ; 3° les pieds p, q, r des hauteurs, sont neuf points situés sur une même circonférence.

Le centre de cette circonférence est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de concours des hauteurs.

Le rayon de cette circonférence est la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle proposé.

Cette dernière partie résulte de ce que le rapport de similitude des triangles ABC et $\alpha\beta\gamma$ est 2.

Tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent.

I (*). Soient $ABCD$ un tétraèdre, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les centres de gravité de ses faces. Si les quatre hauteurs se rencontrent en un même point, on peut démontrer que les perpendiculaires élevées aux faces par les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se rencontrent en un certain point. Soit O ce point.

Cela posé, menons $O\alpha$ et prenons sur la même direction $OA' = 3O\alpha$, et opérons de la même manière relativement aux autres faces : nous obtiendrons les sommets d'un tétraèdre $A'B'C'D'$ égal au proposé, mais inversement situé. Les faces homologues $ABC, A'B'C'$, etc. sont parallèles.

II (**). Si l'on fait sur le tétraèdre $A'B'C'D'$ la même opération que sur $ABCD$, on retrouvera ce dernier tétraèdre. Il y a donc entre ces deux tétraèdres une certaine réciprocité qui nous engage à leur donner le nom de *tétraèdres conjugués*.

III. Les mêmes lettres désignant les points homologues, le point O , point de concours des normales menées aux faces de ABC par les centres de gravité de ces faces, est le point de concours des hauteurs du tétraèdre $A'B'C'D'$, et réciproquement le point O' , où se rencontrent les normales élevées en $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ aux faces du dernier tétraèdre, est le point de concours des hauteurs du premier.

(*) A démontrer.

(**) A démontrer.

IV. Les tétraèdres $ABCD$, $A'B'C'D'$, $\alpha\beta\gamma\delta$ sont semblables et leurs centres de similitude sont respectivement :

Pour $ABCD$ et $A'B'C'D'$, le milieu M de OO' ;

Pour $ABCD$ et $\alpha\beta\gamma\delta$, le centre de gravité G de $ABCD$;

Pour $A'B'C'D'$ et $\alpha\beta\gamma\delta$, le point O .

D'après un théorème connu, les points M , G et O sont en ligne droite; mais O , M et O' sont aussi en ligne droite; donc il en sera de même pour les points O , G et O' . Ainsi :

Dans un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent, le point de concours des normales menées aux faces par leurs centres de gravité, le centre de gravité du tétraèdre et le point de concours des hauteurs sont trois points en ligne droite.

V. Le point O' , considéré comme appartenant au tétraèdre $ABCD$, a pour homologue le point O dans le tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$, car O et O' sont, dans ces deux tétraèdres, les points de concours des hauteurs. Donc, puisque G est le centre de similitude des tétraèdres $ABCD$ et $\alpha\beta\gamma\delta$ dont le rapport de similitude est 3, on aura

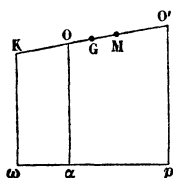
$$O'G = 3OG.$$

IV bis (autre analogue du n° 4). Soient p, q, r, s les projections des sommets du tétraèdre $ABCD$ sur les faces opposées, points qui sont aussi les projections du point O' sur ces faces. Nommons K le centre de la sphère circonscrite et ω la projection de K sur la face BCD ou le centre de la circonférence circonscrite à BCD . On sait que dans le tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent, la projection d'un sommet sur la face opposée est le point de concours des hauteurs de cette face. Donc les points p, α et ω sont en ligne droite (n° 4). Par conséquent les points

O' , G , K ont leurs projections en ligne droite sur une face quelconque du tétraèdre. Donc ces trois points sont en ligne droite. Ainsi :

Dans un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent, le point de concours des hauteurs (O'), le centre de gravité du tétraèdre (G) et le centre de la sphère inscrite (K), sont trois points en ligne droite.

VI. Le point M , milieu de OO' , est le centre de la



sphère circonscrite au tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$. En effet, puisque

$$\omega\alpha = \frac{p\alpha}{2} \quad (\text{n}^{\circ} 4),$$

on aura

$$KO = \frac{OO'}{2} = OM,$$

et puisque G est le milieu de OM , on aura

$$KG = 3GM.$$

Donc le point M est dans le tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ l'homologue du point K dans le tétraèdre proposé, et par suite M est le centre de la sphère circonscrite à $\alpha\beta\gamma\delta$.

VII. Le point M est aussi le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ qui est égal au tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$. Il en résulte que les huit points α , β , γ , δ , α' , β' , γ' , δ' sont sur une même sphère.

VIII. Les points α et α' étant homologues dans les

deux tétraèdres conjugués $ABCD$, $A'B'C'D'$, la droite $\alpha\alpha'$ passe par le point M , et comme le triangle $\alpha'p\alpha$ est rectangle en p , on aura

$$Mp = M\alpha = M\alpha'.$$

Donc le point p est sur la sphère du numéro précédent. On a donc ce théorème :

Dans un tétraèdre $ABCD$ dont les hauteurs se rencontrent :

1° Les centres de gravité $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des faces; 2° les points $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ placés aux deux tiers des droites qui vont de chaque sommet au point de concours des hauteurs; 3° les pieds p, q, r, s des quatre hauteurs, sont douze points situés sur la même sphère.

Le centre de cette sphère est au milieu de la droite qui joint le point de concours des hauteurs au point de concours des normales menées à chaque face par son centre de gravité.

Enfin le rayon de cette sphère est le tiers du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre proposé. P.
