

ED. DEWULF

**Démonstration de quelques théorèmes
de géométrie énoncés dans les Nouvelles
Annales (voir t. XX, p. 83 et 140)**

Nouvelles Annales de Mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 111-117

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__111_1

© Nouvelles Annales de Mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles Annales de Mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE
ÉNONCÉS DANS LES NOUVELLES ANNALES**

(voir t. XX, p. 83 et 140);

PAR M. ED. DEWULF,
Capitaine du Génie (à Bougie).

1. La courbe enveloppe des cordes communes à une courbe fixe du degré m et aux courbes d'un faisceau du degré n , est de la classe $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)$.

(E. DE JONQUIÈRES.)

Soient

$$F_m(x, y) = 0, \quad f_n(x, y) + \lambda \varphi_n(x, y) = 0, \quad y = px,$$

les équations de la courbe, du faisceau et d'une droite passant par l'origine.

Les équations

$$(1) \quad F_m(x, px) = 0,$$

$$(2) \quad f_n(x, px) + \lambda \varphi_n(x, px) = 0,$$

donnent les abscisses des points où la droite coupe la courbe et le faisceau. Éliminons x , et exprimons que la résultante R a deux racines p égales. L'équation de condition que nous obtiendrons ainsi ne renfermera plus que λ . Toutes les valeurs de λ qui satisferont à cette équation détermineront des courbes du faisceau qui auront avec $F_m = 0$ des cordes communes passant par l'origine.

Pour que $R = 0$ ait deux racines égales, il faut que $R = 0$ et $\frac{dR}{dp} = 0$ aient une racine commune.

La résultante R' de ces deux dernières équations sera du degré

$$m(mn - 1) + m^2 n$$

en λ , parce que $R = 0$ est du degré mn en p et du degré m en λ .

Parmi les valeurs de λ données par $R' = 0$ se trouvent : 1° celles qui déterminent les courbes du faisceau qui passent par les $m(m - 1)$ points de contact des tangentes menées par l'origine à F_m ; 2° celles qui déterminent les $m(2n - 1)$ courbes qui passent par les $m(2n - 1)$ points d'intersection de F_m et de la courbe lieu des points de contact des tangentes menées par un point aux courbes d'un faisceau d'ordre n , courbe qui est de l'ordre $2n - 1$, ainsi que nous le verrons plus loin.

Ces deux catégories de courbes ne satisfont pas, à proprement parler, à la question, les cordes communes qu'elles fournissent étant infiniment petites. Le degré de R' se réduira donc à

$$m(mn - 1) + m^2 n - m(m - 1) - m(2n - 1)$$

ou

$$m(m - 1)(2n - 1).$$

Chaque valeur de λ nous donne deux valeurs égales de p ;

on peut donc, par un point, mener $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)$ tangentes au lieu.

C. Q. F. D.

2. Une transversale tourne dans un plan autour d'un point fixe S, et rencontre à chaque instant, en m points, une courbe géométrique C_m de degré m , tracée dans ce plan; si l'on mène les tangentes et les normales à C_m en ces points d'intersection, les tangentes se coupent deux à deux sur une courbe Σ , et les normales se coupent aussi deux à deux sur une courbe Σ' .

1° Le degré de Σ est $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$; cette courbe passe par chacun des $(m-2)$ points de C_m , autres que les points de contact, qui sont situés sur chacune des $m(m-1)$ tangentes à C_m issues de S. Chacune des tangentes à C_m , en ses points d'inflexion ou de rebroussement, est une tangente multiple de Σ d'un ordre de multiplicité égal à $m-1$.

2° Le degré de Σ' est $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-1)$. Si l'on mène par S des parallèles aux m asymptotes de C_m et ensuite des normales à cette courbe en tous les points où ces parallèles la rencontrent à distance finie, on obtiendra d'abord $m(m-1)$ droites parallèles aux asymptotes de Σ' . En outre, il existe, sur C_m , $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$ paires d'éléments infiniment petits, parallèles deux à deux, et situés deux à deux sur des droites concourantes en S. Les normales en ces points, à C_m , sont les directions des autres asymptotes de Σ' . On a, en effet,

$$m(m-1) + \frac{1}{2}m(m-1)(2m-3) = \frac{1}{2}m(m-1)(2m-1).$$

Les normales à C_m , en ses points d'inflexion ou de

rebroussement sont des tangentes à Σ' de l'ordre $m - 1$.

(E. DE JONQUIÈRES.)

Je vais déterminer le degré d'une courbe Σ'' résultant des intersections deux à deux de droites menées par les points où la transversale coupe C_m et faisant en ces points un angle α constant avec C_m .

Voyons en combien de points une transversale L coupe Σ'' . Par tout point M de L on peut mener m^2 droites coupant C_m sous un angle constant, et les points d'intersection sont sur la première polaire inclinée de M par rapport à C_m (voir la *Théorie des polaires inclinées*, t. XVIII et XIX). Les premières polaires inclinées de tous les points de L forment un faisceau d'ordre m . Il y a donc autant de points de Σ'' sur L qu'il y a de cordes communes à ce faisceau F_m et à C_m , passant par S . D'après le théorème précédent, ce nombre est

$$\frac{1}{2} m(m-1)(2m-1).$$

Si $\alpha = 90^\circ$, Σ'' devient Σ' et le degré ne change pas.

Si $\alpha = 0$, Σ'' devient Σ et le degré devient

$$\frac{1}{2} m(m-1)(2m-3),$$

parce que le degré du faisceau des premières polaires s'abaisse d'une unité.

Soit SA une tangente à C_m en un point α , SA coupe C_m en $m-2$ autres points. Soit α_k un de ces points : $\alpha_k\alpha$ représente deux tangentes menées de α_k à C_m ; la corde de contact passe par S , donc α_k se trouve sur Σ .

Menons une transversale L passant par l'origine et par un point α d'inflexion de C_m . Les tangentes menées par les $m-1$ points, autres que α , où L coupe C_m , coupent la tangente en α en $m-1$ points β . Menons une trans-

versale $L\alpha'$ par un point α' infiniment voisin de α sur la courbe. Cette transversale coupe aussi C_m en $m - 1$ points autres que α' , et les tangentes à C_m en ces points coupent la tangente en α en $m - 1$ points β' infiniment voisins des points β . Il y a donc $m - 1$ éléments $\beta\beta'$ de Σ sur la tangente en α à C_m . C. Q. F. D.

Si l'on mène par S des parallèles aux m asymptotes de C_m et ensuite des normales à cette courbe en tous les points où ces droites la rencontrent à distance finie, on obtiendra d'abord $m(m - 1)$ droites parallèles aux asymptotes de Σ' . Ceci est clair.

La droite de l'infini coupe Σ en $\frac{1}{2}m(m - 1)(2m - 3)$ points, et par chacun de ces points on peut mener une paire de tangentes dont les points de contact sont en ligne droite avec S et qui donnent sur C_m des éléments parallèles deux à deux, qui fournissent chacun une direction d'asymptote de Σ' . C. Q. F. D.

On démontrerait, comme plus haut, que les normales à C_m en ses points d'inflexion ou de rebroussement sont des tangentes à Σ' de l'ordre $m - 1$.

On peut transporter ces propriétés à Σ'' .

3. *Étant données dans un plan deux courbes géométriques, l'une C_m du degré m , et l'autre de la classe n ; si une tangente roule sur celle-ci et que par les points où elle rencontre C_m on mène à cette courbe des tangentes et des normales :*

1° *Les tangentes se coupent deux à deux sur une courbe Σ_1 du degré $\frac{1}{2}mn(m - 1)(2m - 3)$.*

2° *Les normales se coupent deux à deux sur une courbe Σ'_1 de degré $\frac{1}{2}mn(m - 1)(2m - 1)$.*

(E. DE JONQUIÈRES.)

Cherchons le degré d'une courbe Σ'' résultant des intersections deux à deux de droites passant par les points où la tangente mobile coupe C_m et y faisant avec C_m un angle constant α .

Ce degré est égal au nombre des tangentes communes à la courbe Σ'' , trouvée plus haut, et à la courbe de la classe n ; il est donc égal à

$$\frac{1}{2} mn(m-1)(2m-1).$$

Le même raisonnement donne pour le degré de Σ' ,

$$\frac{1}{2} mn(m-1)(2m-1),$$

et pour celui de Σ_1

$$\frac{1}{2} mn(m-1)(2m-3).$$

Le procédé de démonstration appliqué au premier théorème ci-dessus peut aussi démontrer un théorème énoncé par M. Moutard : « *Étant données deux surfaces, l'une du degré m , l'autre du degré n ; si d'un point S on projette tous les points de la courbe d'intersection sur un plan, cette courbe projection aura $\frac{mn(m-1)(n-1)}{2}$ points doubles.* »

Note de M. Dewulf. — Voici comment M. Cremona démontre que le lieu Σ des points de contact des tangentes menées d'un point o à tous les courbes d'un faisceau F_n est de l'ordre $2n-1$ (voir son *Introduzione ad una teoria geometrica delle Curve piane*). Soit F'_n le faisceau des premières polaires de o par rapport à F_n . Les points où une courbe de F_n est coupée par la courbe correspondante de F'_n sont les points de contact des tangentes

à la première courbe issues de o ; le lieu cherché est donc aussi le lieu des intersections des courbes correspondantes des deux faisceaux homographiques F_n et F'_n . Or, d'après un théorème de M. de Jonquières, le degré de ce lieu est égal à la somme des degrés des faisceaux, ou $2n-1$.

La courbe Σ , que nous venons de considérer, est aussi le lieu des points doubles des involutions de degré n que détermine un faisceau F_n sur toutes les droites qui passent par le point o . (Voir un Mémoire de M. de Jonquières, *Annali di Tortolini*.)

On peut démontrer les théorèmes suivants :

Quand le point o décrit une courbe de degré n , l'enveloppe des courbes Σ qui correspondent à chacune des positions de o est de l'ordre $m(2n-1)(2m-1)$.

Par un point il passe généralement $n(2n-3)$ droites qui déterminent dans un faisceau d'ordre n des involutions ayant un point quadruple.

Un faisceau de l'ordre n et une droite déterminent une involution de l'ordre n , le rapport anharmonique de quatre groupes de cette involution est constant, quelle que soit la droite, et quel que soit le pôle pris sur la droite, si les quatre groupes sont toujours déterminés par les quatre mêmes courbes.

Il résulte de ce théorème que la série des centres harmoniques des groupes de n points en involution que détermine un faisceau F_n sur une droite quelconque est homographique (ou projective) à la série des centres harmoniques de l'involution d'une autre droite quelconque, ou, en d'autres termes, que les involutions qu'un faisceau détermine sur deux droites sont toujours projectives. (Voir Cremona, *Introduzione*, etc., p. 18.)

Deux faisceaux homographiques (ou projectifs) déterminent sur deux droites des involutions projectives.
