

VINCENZO JANNI

Théorème sur les cercles osculateurs à une ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 80-82

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__80_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LES CERCLES OSCULATEURS A UNE ELLIPSE;

PAR M. VINCENZO JANNI.

Par chaque point d'une ellipse passent toujours trois cercles osculateurs à trois points de la courbe, et l'aire du triangle qui a pour sommets ces points est constante.

(81)

Soit x', y' un point de l'ellipse

$$a^2 y'^2 + h^2 x'^2 = a^2 h^2,$$

la corde commune à l'ellipse et au cercle osculateur qui passe par x', y' est

$$y - y' = \frac{h^2 x'}{a^2 y'} (x - x');$$

éliminant y ou x , on a

$$4x'^3 - 3a^2 x' - a^2 x = 0, \quad 4y'^3 - 3h^2 y' - h^2 y = 0.$$

Or si nous regardons fixe le point x, y , il y a trois points x', y' dont les cercles osculateurs passent par x, y ; parce que x', y' sont donnés par des équations du troisième degré qui ont les racines toujours réelles, elles sont identiques à l'équation qui sert à partager un angle donné en trois parties égales. Or en mettant

$$\frac{x}{a} = \cos \varphi,$$

on a

$$\frac{y}{h} = \sin \varphi.$$

Donc les racines des deux équations ci-dessus seront

$$x' = a \cos \frac{1}{3} \varphi,$$

$$x'' = a \cos \frac{1}{3} (360^\circ - \varphi),$$

$$x''' = a \cos \frac{1}{3} (360^\circ + \varphi);$$

$$y' = h \cos \frac{1}{3} (270^\circ + \varphi),$$

$$y'' = h \cos \frac{1}{3} (90^\circ - \varphi),$$

$$y''' = h \cos \frac{1}{3} (450^\circ - \varphi).$$

Substituant ces valeurs dans la formule

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

parce qu'on a

$$x' + x'' + x''' = 0, \quad y' + y'' + y''' = 0,$$

on obtient la surface du triangle $= \frac{3}{4} ah \sqrt{3}$.