Colot

Solution de la question 509

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 57-60

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__57_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 509

(voir t. XIX, p 45) ;

PAR M. COLOT,

Professeur.

Soient p et q deux nombres donnés, p_1 la moyenne arithmétique, q_1 la moyenne géométrique, p_2 la moyenne arithmétique de p_1 et q_1, q_2 leur moyenne géométrique, et ainsi de suite, de sorte que p_{n+1}, q_{n+1} sont les moyennes arithmétiques et géométriques de p_n, q_n. Quelle est la valeur de $p\infty$ et démontrer que $p\infty = q\infty$. (GAUSS.)

Il est facile de montrer que $p\infty = q\infty$. En effet on a, par définition des quantités q_1 et p_1,

$$p_1 = \frac{p+q}{2}, \quad q_1 = \sqrt{pq},$$

d'où

$$p_1 - q_1 = \frac{p+q-2\sqrt{pq}}{2} = \frac{p-2\sqrt{q}\,(\sqrt{p}-\sqrt{q})}{2} < \frac{p-q}{2};$$

on aurait de même

$$p_2 - q_2 < \frac{p_1 - q_1}{2} < \frac{p-q}{4},$$

$$p_3 - q_3 < \frac{p_2 - q_2}{2} < \frac{p-q}{8},$$

et, en général,

$$p_n - q_n < \frac{p-q}{2^n},$$

ce qui démontre que la différence $p_n - q_n$ a pour limite zéro.

Avant de chercher la valeur commune des deux quantités $p\infty$, $q\infty$, nous établirons quelques lemmes.

Lemmes. — Soient c, c_1, c_2,..., une suite de quantités plus petites que l'unité et croissantes, liées entre elles par les relations

$$c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}, \ldots.$$

Soient

$$b = \sqrt{1-c^2}, \quad b_1 = \sqrt{1-c_1^2},$$

on aura

1°

(α) $$b = \frac{2\sqrt{b_1}}{1+b_1}, \quad b_1 = \frac{2\sqrt{b_2}}{1+b_2}.$$

2°

(β) $$1+b_1 = \frac{2}{1+c}, \quad 1+b_2 = \frac{2}{1+c_1}.$$

3°

(γ) $$\left\{ \begin{array}{l} D(c_n) = (1+c)(1+c_1)\ldots(1+c_{n-1})\,D(c) \\ \end{array} \right.$$
(Verhulst, *Fonctions elliptiques*, p. 148.)

4°

(δ) $$D(b) = (1+b_n)(1+b_{n-1})\ldots(1+b_1)\,D(b_n).$$

5°

(ε) $$D(b) = \frac{2}{1+c_{n-1}} \cdot \frac{2}{1+c_{n-2}} \cdots \frac{2}{1+c}\,D(b_n).$$

6°

$$(\lambda) \qquad (1+c)(1+c_1)\ldots(1+c_{n-1}) = \frac{2^n D(b_n)}{D(b)}.$$

[D (b) représente la fonction elliptique complète de première espèce $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\varphi}}$, et ainsi des autres.)

Les égalités (α) et (β) se vérifient sans difficulté.

(δ) ne diffère de (γ) qu'en ce que les modules c, c_1, $c_2, \ldots$, ont été remplacés par b_n, $b_{n-1}, \ldots$, qui ont entre eux les mêmes relations.

(ε) est une conséquence immédiate de (β) et de (δ).

Enfin en résolvant (γ) par rapport au produit $(1+c)\,(1+c_1)\ldots(1+c_{n-1})$, on obtient la formule (λ).

Passons maintenant à la recherche de $p\infty$.

Posons

$$\frac{q}{p} = c, \quad \frac{q_1}{p_1} = c_1, \; \ldots, \quad \frac{q_n}{p_n} = c_n, \ldots.$$

Nous aurons

$$p_n = \frac{p_{n-1}+q_{n-1}}{2}, \quad q_n = \sqrt{p_{n-1}\,q_{n-1}},$$

$$\frac{q_n}{p_n} = \frac{2\sqrt{p_{n-1}\,q_{n-1}}}{p_{n-1}+q_{n-1}}$$

ou

$$c_n = \frac{2\sqrt{c_{n-1}}}{1+c_{n-1}};$$

par conséquent tout ce qui a été dit précédemment est applicable à la suite de rapports $\frac{q}{p}$, $\frac{q_1}{p_1}$, etc.

De plus on a

$$2p_1 = p + q = p(1+c),$$
$$2p_2 = p_1 + q_1 = p_1(1+c_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2p_n = p_{n-1} + q_{n-1} = p_{n-1}(1+c_{n-1}).$$

Multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs,

$$2^n p_n = p(1+c)(1+c_1)\ldots(1+c_{n-1}),$$

et comme $(1+c)(1+c_1)\ldots(1+c_{n-1}) = \dfrac{2^n \mathrm{D}(b_n)}{\mathrm{D}(b)}$,

$$p_n = p \cdot \frac{\mathrm{D}(b_n)}{\mathrm{D}(b)},$$

pour $n = \infty$, $c_n = 1$, $b_n = 0$,

$$\mathrm{D}(b_n) = \frac{\pi}{2};$$

donc

$$p\infty = \frac{p\pi}{2\mathrm{D}(b)},$$

remplaçant b par sa valeur

$$\sqrt{1-c^2} = \sqrt{1 - \frac{q^2}{p^2}} = \frac{1}{p}\sqrt{p^2-q^2},$$

nous aurons pour valeur définitive

$$p\infty = \frac{p\pi}{2\mathrm{D}\left(\frac{1}{p}\sqrt{p^2-q^2}\right)}.$$