

L. ANDLAUER

G. CHAUVÉAU

Question 629 (Vannson)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 462-464

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__462_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION 629 (VANNSON);

SOLUTION DE MM. L. ANDLAUER ET G. CHAUVEAU,

Elèves de mathématiques spéciales.

Prenons pour axes de coordonnées trois arêtes contiguës du tétraèdre et soient $2a$, $2b$, $2c$ les longueurs de ces arêtes.

L'équation générale des surfaces du second degré est

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'yz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Pour que les axes soient tangents à cette surface aux points

$$\begin{array}{lll} x = 0, & x = 0, & x = a, \\ y = 0, & y = b, & y = 0, \\ z = c, & z = 0, & z = 0, \end{array}$$

il faut, en posant $D = 1$, que l'on ait

$$\begin{array}{lll} A'' = \frac{1}{c^2}, & A' = \frac{1}{b^2}, & A = \frac{1}{a^2}, \\ C'' = -\frac{1}{c}, & C' = -\frac{1}{b}, & C = -\frac{1}{a}. \end{array}$$

L'équation de la surface devient donc

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2B'yz + 2B'zx + 2B''xy \\ - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{2z}{c} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Il faut exprimer maintenant que cette surface passe par les milieux des trois autres arêtes, c'est-à-dire que son

équation est satisfaite par

$$\begin{array}{lll} x = 0, & y = 0, & z = 0, \\ y = b, & z = c, & x = a, \\ z = c, & x = a, & y = b, \end{array}$$

ce qui nous donne

$$B = \frac{1}{2bc}, \quad B' = \frac{1}{2ac}, \quad B'' = \frac{1}{2ab}.$$

Il nous vient donc pour l'équation de la surface

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{2z}{c} + 1 = 0.$$

Il est clair maintenant que cette surface est tangente à ces trois autres arêtes; en effet, si nous cherchons son intersection avec l'une d'elles, nous trouvons pour

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 2, \\ y = 0, \end{array} \right.$$

que les z d'intersection sont donnés par

$$\left(\frac{z}{c} - 1 \right)^2 = 0,$$

ce qui prouve bien que la droite est tangente à la surface.

Les équations qui déterminent les coordonnées du centre de cette surface sont

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{z}{ac} + \frac{y}{ab} - \frac{2}{a} = 0,$$

$$\frac{2y}{b^2} + \frac{z}{bc} + \frac{x}{ab} - \frac{2}{b} = 0,$$

$$\frac{2z}{c^2} + \frac{y}{bc} + \frac{x}{ac} - \frac{2}{c} = 0.$$

Et ces équations sont satisfaites par les coordonnées du centre de gravité du tétraèdre

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = \frac{c}{2}.$$

Si l'on rapporte la surface à son centre, son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} = \frac{1}{2}.$$

Note. — La même solution nous a été adressée par MM. Hans et Vandenbronckue, élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).