

Théorie des points multiples et des tangentes ; d'après Salmon

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 41-45

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__41_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES POINTS MULTIPLES ET DES TANGENTES ;

D'APRÈS SALMON.

1. Soit

$$A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \dots = 0$$

l'équation en coordonnées cartésiennes d'une courbe.

Si l'on a $A = 0$, la tangente à l'origine est alors

$$Bx + Cy = 0,$$

ou en coordonnées polaires

$$\rho (B \cos \theta + C \sin \theta) = 0.$$

Si l'on a encore $B = 0$, l'axe des x est une tangente, et si $C = 0$, l'axe des y est une tangente.

2. Si $A = B = C = 0$, toute droite qui passe par l'origine rencontre la courbe en deux points qui *coïncident*; l'origine est alors un point double, et sous ce point de vue toutes ces lignes sont en quelque sorte des tangentes; mais parmi ces lignes il y en a deux qui touchent plus étroitement les courbes que toutes les autres: ce sont celles qui sont déterminées par l'équation polaire

$$\rho^2(D \cos^2 \theta + E \sin \theta \cos \theta + F \sin^2 \theta) = 0;$$

alors l'équation polaire devient divisible pour ρ^2 ; trois valeurs de ρ deviennent nulles: ce sont ces deux lignes qui portent exclusivement le nom de *tangentes*. Le système de ces deux lignes est représenté par l'équation

$$Dx^2 + Gxy + Fy^2 = 0.$$

3. Si l'équation polaire de la courbe est

$$u_1 + u_2 + \dots = 0,$$

u_p , c'est ρ^p multipliée par une fonction trigonométrique de θ , $u_2 = 0$ est l'équation du système des doubles tangentes.

Il y a trois cas à distinguer :

1° Les deux tangentes sont *réelles*. Alors l'origine est un point d'intersection de deux branches de la courbe, chaque branche ayant sa tangente particulière. On en a un exemple simple dans les courbes formées du système de deux autres courbes; soient

$$P = 0, \quad Q = 0$$

deux courbes de degrés p et q et $p + q = n$; alors

$$U = PQ = 0$$

est une courbe de degré n ; les courbes P et Q se coupent en pq points, et en chacun de ces points il y a évidemment deux tangentes, l'une à la courbe P et l'autre à la courbe Q.

2° u_1 est un carré parfait; les deux tangentes réelles coïncident en une seule droite double. Le point porte alors le nom de *point de rebroussement*, et quelquefois, d'après une considération cinématique, *point stationnaire*. Si la courbe est décrite par un point, lorsque, ayant parcouru une des branches, il arrive au point de contact de la tangente double, il semble s'arrêter pour changer subitement le *sens* du mouvement dans le sens opposé. La tangente double touche en *trois points* consécutifs.

L'exemple rapporté ci-dessus ne peut pas servir ici; supposons que les deux courbes

$$P = 0, \quad Q = 0$$

se touchent; alors il y a en ce point une seule tangente, mais elle rencontre la courbe de ce degré n en *quatre points* consécutifs, deux sur la courbe P et deux sur la courbe Q. Ainsi quoiqu'il y ait une tangente double, ce n'est pas là un point de rebroussement; l'équation polaire a alors la forme

$$u_1^2 + u_1 v_2 + u_4 + \dots = 0,$$

$u_1 = 0$ réduit l'équation à

$$u_4 + \dots = 0.$$

3° Les deux tangentes sont *imaginaires*, alors il n'existe aucun point consécutif à l'origine qui est ainsi un point *isolé*, mais *conjugué* à la courbe; toutes les droites qui passent par ce point sont des espèces de tangentes qui coupent la courbe en $n - 2$ points, si n est le degré de la courbe.

4. *Exemple.* — Soit la cubique donnée par l'équation

$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c); \quad c > b > a;$$

la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x . Soient A, B, C les trois points de l'axe des x correspondants à

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c,$$

la courbe est formée d'un ovale passant par A et B et d'une branche de forme parabolique, ayant pour sommet C; entre B et C il n'existe aucun point.

Si $b = c$, le point B coïncide avec C; l'ovale et la branche forment une seule ligne, et en C il existe deux tangentes réelles.

Si $a = b$, alors A et B coïncident; l'ovale se réduit en un point *conjugué*, et les droites qui passent par ce point ne peuvent rencontrer la branche infinie qu'en un seul point.

Si $a = b = c$, les trois points A, B, C coïncident; il n'y existe qu'une seule tangente simultanément aux deux branches infinies. A est un point de rebroussement.

5. Si $a = b = c = 0$, l'origine devient un point *triple*, chaque droite qui y passe rencontre là la courbe en trois points consécutifs, et ne peut plus la couper qu'en $n - 3$ points, il y existe *trois tangentes* données par l'équation

$$u_3 = 0,$$

ce qui donne lieu à quatre espèces de points triples :

- 1° Les trois tangentes réelles et distinctes;
- 2° Une réelle et deux coïncidentes;
- 3° Les trois coïncidentes;
- 4° Une réelle et deux imaginaires.

Ce dernier cas est remarquable, car, à l'œil, ce point triple ne se distingue en rien des autres points de la

courbe; il n'y a, pour ainsi dire, que l'œil analytique qui aperçoit une différence.

6. Si l'équation polaire est de la forme

$$u_k + u_{k+1} + \dots = 0,$$

ou suppose que tous les termes qui précèdent u_k sont nuls; alors l'origine est un point de multiplicité k ; il y a là k points coïncidents, et les trois qui y passent ne peuvent rencontrer la courbe qu'en $n - k$ points; il y existe k tangentes, ayant $k + 1$ points en commun avec la courbe, et ne pouvant rencontrer la courbe qu'en $n - k - 1$ points.