

JOSEPH SACCHI

Note sur la généralisation du théorème de Pythagore

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 330-331

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__330_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE
SUR LA GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PYTHAGORE ;

PAR M. JOSEPH SACCHI (DE MILAN).

Si entre les côtés a, b, c , d'un triangle rectiligne, respectivement opposés aux angles α, β, γ , on a la relation $a^n = b^n + c^n$, où n et α sont des constantes, on aura nécessairement et uniquement $n = 2$ et $\alpha = \frac{1}{2} \pi$ ().*

En posant

$$\sin \alpha = h, \quad \alpha + \beta = \gamma,$$

et, en substituant, dans la relation donnée, les valeurs

$$b = \frac{a}{h} \sin \beta, \quad c = \frac{a}{h} \sin \gamma,$$

on obtient

$$(1) \quad h^n = \sin^n \beta + \sin^n \gamma.$$

(*) M. Sacchi a remarqué que la démonstration de cette proposition donnée par M. Umplénbach (*Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 400) est incomplète.

Prenant la dérivée par rapport à β , on a la relation

$$\sin^{n-1} \beta \cos \beta + \sin^{n-1} \gamma \cos \gamma = 0,$$

laquelle, multipliée par $\tan \beta \tan \gamma$, donne

$$\sin^n \beta \tan \gamma + \sin^n \gamma \tan \beta = 0;$$

éliminant $\sin^n \gamma$ au moyen de l'équation (1), et ensuite remplaçant $\tan \gamma$, $\tan \beta$, $\tan \alpha$, par leurs valeurs respectives

$$\frac{\tan \beta + \tan \alpha}{1 - \tan \beta \tan \alpha}, \quad \frac{\sin \beta}{\sqrt{(1 - \sin^2 \beta)}}, \quad \frac{h}{\sqrt{(1 - h^2)}},$$

et posant $\sin \beta = X$, on a

$$X h^n - X^{n-1} = h^{n-1} \sqrt{(1 - h^2)(1 - X^2)}.$$

De là, en faisant le carré des deux membres, on déduit

$$X^2 (X^{2n-4} - 2 h^n X^{n-2} + h^{2n-2}) + h^{2n-2} (h^2 - 1) = 0.$$

Cette équation, devant subsister quel que soit X , fournit les deux suivantes

$$h^2 - 1 = 0, \quad X^{2n-4} - 2 h^n X^{n-2} + h^{2n-2} = 0,$$

de la première desquelles on tire $h = 1$, ou bien $\alpha = \frac{1}{2} \pi$;

et par conséquent la seconde devient

$$(X^{n-2} - 1)^2 = 0,$$

et ne peut être satisfaite, quel que soit X , que par $n = 2$.
