

F. SIACCI

Question 616

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 328-330

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__328_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION 616

(voir p. 156).

Soit construit un triangle MNO, le sommet N est fixe ainsi que les directions des côtés NM et NO, le côté MO a une longueur constante; par conséquent il touchera une certaine courbe: le point de contact sur chaque tangente MO est aussi éloigné de M que la projection orthogonale de N est éloignée de O; cette courbe nommée hypocycloïde, est fermée et composée de quatre branches correspondant aux quatre angles des directions données NM, NO. (BÖKLEN.)

SOLUTION DE M. F. SIACCI,
Officier d'artillerie (à Turin).

Soit P le point de la courbe correspondant à la tangente MO, et soient x, y ses coordonnées rapportées aux axes NO, NM. On aura

$$PM = \frac{x \sin N}{\sin(\alpha - N)}, \quad PO = \frac{y \sin N}{\sin \alpha},$$

et par conséquent

$$(1) \quad \frac{x \sin N}{\sin(\alpha - N)} + \frac{y \sin N}{\sin \alpha} = a,$$

a étant la longueur constante MO, et α l'angle que cette droite fait avec l'axe des x . Cette équation représente la droite MO dans une de ses positions. Si on la différencie par rapport à α , on aura une autre équation dans laquelle, ainsi que dans la précédente, x, y sont les coordonnées du point P de la courbe.

Or, de l'équation (1), on déduit l'équation

$$y = \frac{a \sin \alpha}{\sin N} - \frac{x \sin \alpha}{\sin(\alpha - N)},$$

laquelle, différenciée par rapport à α et divisée par $d\alpha$, donne

$$\frac{x \sin N}{\sin^2(\alpha - N)} = - \frac{a \cos \alpha}{\sin N};$$

d'où

$$\frac{x \sin N}{\sin(\alpha - N)} = - \frac{a \sin(\alpha - N)}{\sin N} \cdot \cos \alpha,$$

équation qui démontre le théorème, ayant trouvé

$MP = \frac{x \sin N}{\sin(\alpha - N)}$, et la projection de ON sur OM étant

égale à $-\frac{a \sin(\alpha - N)}{\sin N} \cdot \cos \alpha$.

Il résulte évidemment de cette propriété : 1° que la courbe est symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle N; 2° qu'elle rencontre les axes en quatre points également éloignés de l'origine; 3° que ces points sont des points d'inflexion.

Lorsque $N = 90^\circ$, il devient très-facile d'avoir l'équation de la courbe. En effet, l'équation (1) devient alors

$$-\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = a,$$

qui, différenciée par rapport à α , donne

$$-\frac{x \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{y \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0,$$

d'où

$$\text{tang } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = - \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}},$$

$$\sin \alpha = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \alpha = \frac{-x^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

et par conséquent

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

équation d'une hypocycloïde.
