

SACCHI

Question 493

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 321-322

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__321_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION 495

(voir tome VIII, page 444).

Soit P un point d'une courbe A ; C le centre de courbure en P ; O un point fixe, origine des rayons vecteurs; CD perpendiculaire à CP ; et D le point d'intersection de CD avec le rayon vecteur PO , ou bien avec son prolongement. Si le rayon de courbure de la courbe A est proportionnel à une puissance n quelconque de la perpendiculaire conduite de l'origine O sur la tangente à la courbe, le rayon de courbure de la développée de A et correspondant au point C sera égal à $n \cdot CD$.

GÉNÉRALISATION ET SOLUTION PAR M. SACCHI (DE MILAN).

Que l'on tire OQ perpendiculaire à CP ; OQ et QP seront les longueurs des perpendiculaires conduites de O sur la normale et sur la tangente à la courbe A en P .

En posant

$$QP = p, \quad OQ = q, \quad OP = r, \quad CP = R,$$

et en nommant R_1 le rayon de courbure de la développée, α l'angle compris entre R et un axe fixe, et en désignant avec un accent la dérivée par rapport à α , on aura les formules connues

$$(1) \quad R' = R_1, \quad p' = q,$$

et à cause des triangles semblables PCD , PQO ,

$$(2) \quad CD = \frac{q}{p} R.$$

Or, a indiquant une constante et n un nombre quelcon-

que, on a par hypothèse

$$(3) \quad R = ap^n,$$

et en prenant la dérivée par rapport à α , eu égard aux relations (1), (2), (3), on obtient

$$R_1 = n \cdot CD,$$

laquelle démontre la proposition énoncée. Le rayon de courbure R_1 doit être porté de C vers D, ou bien en sens contraire, suivant que n est positif ou négatif.

Si dans l'équation (3) on remplace R par sa valeur $\frac{rr'}{p'}$, et qu'on représente par h et k deux constantes, on aura, en intégrant l'équation résultante :

$$r^2 = hp^{n+1} + k,$$

laquelle est l'équation entre r et p de la famille des courbes dont le rayon de courbure satisfait à la condition (3) donnée dans la question.

Cette dernière représente, dans le cas de $n = -3$, les coniques rapportées au centre; $n = 1$ l'épicycloïde rapportée au centre du cercle fixe, et aussi la développante de la circonférence quand on a, en outre, $h = 1$. En supposant dans la même équation $k = 0$, la résultante représente, pour $n = 3$, la parabole rapportée au foyer; $n = 0$, la circonférence rapportée à l'un de ses points; $n = 1$, la spirale logarithmique rapportée au point asymptotique; $n = -3$ l'hyperbole équilatère rapportée au centre; $n = \frac{1}{3}$, la cardioïde rapportée au point de rebroussement; $n = -\frac{1}{3}$, la lemniscate de Bernoulli rapportée au centre; etc.
