

H. DELORME

Solution des questions américaines n° 3 et 5

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 176-179

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__176_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DES QUESTIONS AMÉRICAINES N^{os} 3 ET 5;

PAR M. H. DELORME.

Question 3.

Entre les deux relations

$$x \cos (\varphi + \alpha) + y \sin (\varphi + \alpha) = a \sin 2 \varphi,$$

$$y \cos (\varphi + \alpha) - x \sin (\varphi + \alpha) = 2 a \cos 2 \varphi \quad (*),$$

(*) C'est par erreur qu'il y a dans l'énoncé

$$y \cos (\varphi + \alpha) + x \sin (\varphi + \alpha) = 2 a \cos 2 \varphi.$$

on élimine φ . Démontrer que l'on obtient la relation

$$(\gamma \sin \alpha + x \cos \alpha)^{\frac{2}{3}} + (x \sin \alpha - \gamma \cos \alpha)^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Nous pouvons considérer la première équation comme représentant une droite variant de position pour les différentes valeurs de φ .

Remarquons que la seconde équation est précisément la dérivée par rapport à φ de la première. Éliminer φ entre ces deux équations revient donc à trouver l'enveloppe des droites représentées par la première. Changeons les axes des coordonnées et prenons pour nouveaux axes les axes rectangulaires définis, l'axe des x par l'équation

$$\gamma \sin \alpha + x \cos \alpha = 0,$$

et l'axe des γ par l'équation

$$\gamma \cos \alpha + x \sin \alpha = 0.$$

Ce changement d'axes revient à faire tourner les axes de l'angle α et à changer le sens des γ positifs. La première équation devient

$$\begin{aligned} & (\gamma \sin \alpha + x \cos \alpha) \cos (\varphi + \alpha) \\ & + (x \sin \alpha - \gamma \cos \alpha) \sin (\varphi + \alpha) = a \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Cherchons l'ordonnée et l'abscisse à l'origine

$$\gamma = -2a \cos \varphi,$$

$$x = 2a \sin \varphi,$$

$$x^2 + \gamma^2 = 4a^2.$$

Les droites définies par l'équation précédente sont donc des droites dont la partie interceptée entre les deux axes est constante et égale $2a$. On sait que l'enveloppe de pareilles droites est

$$x^{\frac{2}{3}} + \gamma^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Revenant aux anciens axes, on obtient

$$(y \sin \alpha + x \cos \alpha)^{\frac{2}{3}} + (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}},$$

ce qui est la relation demandée.

Question 5.

Les ellipses définies par l'équation

$$ax^2 + by^2 = 1,$$

dans laquelle a et b sont des variables assujetties à la relation $b - a = c$, sont coupées par la courbe

$$x = Ce^{-\frac{cy^2}{2}}$$

sous un angle dont la tangente est $\frac{y}{x}$ (*).

Soit V l'angle des deux tangentes aux courbes au point commun x, y ; soient α et α' les angles des tangentes avec l'axe des x . On a

$$\text{tang } V = \frac{\text{tang } \alpha - \text{tang } \alpha'}{1 + \text{tang } \alpha \text{ tang } \alpha'},$$

$$\text{tang } \alpha = -\frac{ax}{by}.$$

Pour avoir $\text{tang } \alpha'$, remarquons que l'équation de la courbe donnée peut s'écrire

$$Lx + \frac{cy^2}{2} - LC = 0,$$

(*) L'énoncé était encore inexact : il y a $a - b = c$ et $\frac{x}{y}$ au lieu de $b - a = c$ et de $\frac{y}{x}$.

$$\text{tang } \alpha' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

$$\text{tang } \alpha' = \frac{-\frac{1}{x}}{cy} = -\frac{1}{cxy},$$

$$\text{tang } V = \frac{-\frac{ax}{by} + \frac{1}{cxy}}{1 + \frac{ax}{bcxy^2}} = \frac{y}{x} \frac{b - acx^2}{a + bcy^2},$$

$$\text{tang } V = \frac{y}{x} \frac{b - acx^2 - a - bcy^2 + a + bcy^2}{a + bcy^2}.$$

Mais le point x, y étant sur l'ellipse,

$$acx^2 + bcy^2 = c,$$

$$\text{tang } V = \frac{b - a - c + a + bcy^2}{a + bcy^2} \frac{y}{x},$$

et comme $b - a = c$,

$$\text{tang } V = \frac{y}{x}.$$

C. Q. F. D.
