TERQUEM

Série homographique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 114-116

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__114_1>

SÉRIE HOMOGRAPHIQUE.

Lemme. — Soient a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_{2p}$, etc., une série de termes telle, que dans quatre termes consécutifs la somme des extrêmes surpasse la somme des moyens de la quantité constante n.

Termes généraux.

$$a_{2n} = (n-1)(a_3 - a_1) + a_2 + 2^{n-2}k,$$
$$a_{2n+1} = n(a_3 - a_1) + a_1 + 2^{n-1}k,$$

faciles à trouver.

Corollaire. p termes quelconques étant liés par une équation linéaire, on calcule facilement les termes généraux, par la théorie des séries récurrentes.

Termes sommatoires.

Soit la série $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}$, et S_{2n} le terme sommatoire

$$S_{2n} = \frac{n(n-1)}{2}(a_3 - a_1) + na_2 + 4^{n-2}k,$$

$$S_{2n+1} = \frac{n(n-1)}{2}(a_3 - a_1) + na_1 + 2.4^{n-2}, k.$$

Somme totale :

$$n(n-1)(a_3 - a_1)\, n(a_2 + a_1) + 3.\, 4^{n-2}k.$$

Soient a_1, a_2, a_3, ..., les trois premiers termes d'une série telle, que dans les termes consécutifs le produit des extrêmes divisé par le produit des moyens donne un quotient constant log k.

Faisons

$$a_1 = e^{x_1}, \quad a_2 = e^{x_2}, \ldots, \quad a_p = e^{x_p}, \ldots,$$

la solution énoncée s'écrira ainsi :

$$e^{x_{p_1} + x_{p_4} - x_{p_2} - x_{p_3}} = \log k,$$

d'où

$$x_1 + x_4 - x_2 - x_3 = k.$$

D'après le lemme

$$x_{2n} = (n-1)(x_3 - x_1) + x_2 + 2^{n-2}k,$$
$$x_{2n+1} = n(x_3 - x_1) + x_1 + 2^{n-1}k,$$
$$x_{2n+2} = n(x_3 - x_1) + x_2 + 2^n k,$$
$$x_{2n+3} = (n+1)(x_3 - x_1) + x_1 + 2^{n+1}k,$$

on a

$$x_{2n} = \frac{x_{2n+1} \cdot x_{2n+2} + k}{x_{2n+3}}.$$

Substituant les valeurs de x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+3}, on aura x_{2n}

en fonction de x_3, x_1, x_2,

$$e^{x_{2n}} = e^{(n-1)(x_3 - x_1) + x_2 + 2^{n-2}k},$$

Prenant les logarithmes, on a

$$a_{2n} = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^{n-1} . a_1 . 2^{n-2} k,$$

$$a_{2n+1} = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^{n} . a_1 . 2^{n-1} k.$$

Donnant successivement à n les valeurs 1, 2, 3, ..., 4, on trouve sans difficulté le terme sommatoire.

Remarque. — Il est évident que cette méthode s'applique à une relation qui comprend un multiple quelconque de rapports. Le plus simple est le produit binaire autrement dit anharmonique.

A chaque relation correspond une propriété géométrique, correspondance que M. Chasles a brillamment établie pour le rapport binaire (*).