

ANGE LE TAUNÉAC

Note sur la question 572

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 393-395

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__393_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA QUESTION 572 ;

PAR M. ANGE LE TAUNÉAC.

Le principe invoqué à la fin de la page 266 peut être énoncé en ces termes :

« Si le terme général d'une série, u_n , a la forme $f'(n)$,
» la somme S_n des n premiers termes sera donnée par la

» formule

$$S_n = f(n) + \text{const. »}$$

On aurait, par exemple,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = l(3) - 1,$$

résultat évidemment absurde.

Il n'est pas étonnant, d'après ces prémisses, que la valeur indiquée (p. 267) pour la limite de la somme des termes de la série

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{7.8.9} + \dots$$

soit inexacte; cette valeur est $\frac{1}{4} l 2$, comme le trouve M. Prinz (p. 286).

Du reste, la série d'Euler peut être sommée par le procédé suivant, très-connu, et applicable à une foule de cas.

Soit

$$y = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^7}{5.6.7} + \frac{x^{11}}{9.10.11} + \dots,$$

x étant supposé compris entre $+1$ et -1 .

Prenant les dérivées des deux membres, on obtient

$$y''' = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \dots,$$

c'est-à-dire

$$y''' = \frac{1}{1-x^4}.$$

De là on conclut successivement :

$$y'' = \frac{1}{4} l(1+x) - \frac{1}{4} l(1-x) + \frac{1}{2} \text{arc tang } x,$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{4}(1+x)l(1+x) + \frac{1}{4}(1-x)l(1-x) \\
&\quad - \frac{1}{4}l(1+x^2) + \frac{1}{2}x \operatorname{arc} \operatorname{tang} x, \\
y &= \frac{1}{8}(1+x)^2 l(1+x) - \frac{1}{8}(1-x)^2 l(1-x) - \frac{1}{4}xl(1+x^2) \\
&\quad - \frac{1}{4}(1-x^2) \operatorname{arc} \operatorname{tang}' x.
\end{aligned}$$

Si, dans cette dernière formule, on suppose $x = 1$, on trouve

$$y = \frac{1}{4}l^2 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11} + \dots$$

En combinant les relations précédentes, on en obtient d'autres; par exemple celle-ci, que je propose aux jeunes lecteurs des *Annales* :

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 13} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 17} + \dots$$

(3 juillet 1861.)