

E.-E. KUMMER

## **Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 20  
(1861), p. 359-365

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1861\\_1\\_20\\_\\_359\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__359_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES

(voir t. XX, p. 255);

PAR M. E.-E. KUMMER.

CRELLE, t. LVII.

TRADUIT PAR M. E. DEWULF,  
Capitaine du Génie.

### § V. — *Des surfaces qui dépendent d'un système de rayons.*

Les cinq points que nous avons déterminés sur chaque rayon, savoir les deux points limites des plus courtes distances, les deux foyers et le centre, ont pour lieux géométriques cinq surfaces quand on considère tous les rayons d'un système. Ces cinq surfaces sont liées au système d'une manière très-intime. Les deux surfaces, lieux géométriques des points limites, se présentent habituellement sous la forme analytique d'une seule surface, en ce sens qu'elles sont représentés par un même équation. Par suite, elles peuvent être considérées comme deux nappes d'une même surface. Cependant, comme il est quelquefois nécessaire de les distinguer l'une de l'autre, nous les désignerons dans la suite par les lettres  $F_1$  et  $F_2$ . *Ces deux surfaces partagent l'espace en deux régions; l'une d'elles, comprise entre les deux surfaces, renferme toutes les plus courtes distances de deux rayons infiniment voisins; l'autre, située en dehors des deux surfaces, ne renferme aucune de ces plus courtes distances.*

Si l'on passe d'un rayon au rayon infiniment voisin dont la plus courte distance au premier se trouve sur la surface  $F_1$ , de ce second rayon à un troisième rayon infiniment voisin dont la plus courte distance au second se trouve encore sur  $F_1$ , et ainsi de suite, l'ensemble de tous ces rayons forme une surface réglée  $O_1$ . La courbe d'intersection  $a$  de  $O_1$  avec  $F_1$  est la courbe de  $O_1$  qui jouit de cette propriété que les plus courtes distances de deux génératrices consécutives forment précisément les éléments de cette courbe. C'est la courbe de striction.  $O_1$  coupe aussi  $F_2$  suivant une courbe  $b_2$ . Si l'on opère de la même manière sur  $F_2$ , on obtient une surface réglée  $O_2$  dont la ligne de striction est la courbe d'intersection  $a_2$  de  $O_2$  et de  $F_2$ .  $O_2$  coupe aussi  $F_1$  suivant une certaine courbe  $b_1$ .

Tout ce que nous venons de dire subsiste quel que soit le rayon du système que l'on prend pour point de départ; il existe donc une série de surfaces réglées  $O_1$  dont les lignes de striction forment une série de courbes  $a_1$  tracées sur  $F_1$  et qui coupent aussi  $F_2$  suivant une série de courbes  $b_2$ . On a de même une série de surfaces réglées  $O_2$  dont les courbes de striction  $a_2$  se trouvent sur  $F_2$  et qui coupent  $F_1$  suivant une série de courbes  $b_1$ .

Désignons par  $x', y', z'$  les coordonnées du premier des points limites sur le rayon issu du point  $x, y, z$ , on a

$$x' = x + r_1 \xi, \quad y' = y + r_1 \eta, \quad z' = z + r_1 \zeta.$$

Ce sont les équations de la surface  $F_1$  en ce sens que les coordonnées de chacun des points de cette surface sont des fonctions de deux variables indépendantes. De même

$$x' = x + r_2 \xi, \quad y' = y + r_2 \eta, \quad z' = z + r_2 \zeta,$$

sont les équations de  $F_2$ .

Pour avoir les équations des séries de surfaces  $O_1$  et  $O_2$ ,

il faut intégrer les équations différentielles

$$\frac{dv}{du} = t_1, \quad \frac{dv}{du} = t_2.$$

Les équations que l'on obtient renferment chacune une constante arbitraire. Si, entre l'une de ces équations et les deux équations

$$\frac{x' - x}{\xi} = \frac{y' - y}{\eta} = \frac{z' - z}{\zeta},$$

on élimine les variables  $u$  et  $v$ , on obtiendra une équation en  $x' y' z'$  qui contiendra une constante arbitraire et représentera l'une ou l'autre des séries de surfaces réglées  $O_1, O_2$  suivant que l'on aura employé l'une ou l'autre des équations données par les intégrales. Les deux séries de courbes  $a_1$  et  $b_1$  sur  $F_1$ , ou  $a_2$  et  $b_2$  sur  $F_2$  seront représentées par les trois équations de  $F_1$  ou  $F_2$  et l'une ou l'autre des équations données par les intégrales.

Les deux surfaces sur lesquelles se trouvent les foyers d'un système se nomment *surfaces focales du système*. Nous les désignerons par  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . Ces surfaces n'ont de points réels sur un rayon que si les foyers de ce rayon sont réels ou si les racines  $\tau_1$  et  $\tau_2$  de l'équation quadratique (5), § 4, ont des valeurs réelles.

Si l'on passe d'un rayon au rayon infiniment voisin qui coupe le premier en un point situé sur  $\Phi_1$ , de ce second rayon à un point troisième qui coupe le second en un point situé sur  $\Phi_1$  et ainsi de suite, on obtient une série de rayons telle, que chacun d'eux coupe le précédent en un point de  $\Phi_1$ . Cette série de rayons forme donc une surface développable  $\Omega_1$ , dont l'arête de rebroussement  $\alpha_1$  s'y trouve sur  $\Phi_1$  et qui coupe  $\Phi_2$  suivant une certaine courbe  $\beta_2$ . Comme nous sommes partis d'un rayon quelconque, il est clair qu'il existe une série de surfaces dé-

veloppables  $\Omega_1$ , dont les arêtes de rebroussement forment une série de courbes  $\alpha_1$  tracées sur  $\Phi_1$ , et qui déterminent sur  $\Phi_2$  une série de courbes  $\beta_1$ . De la même manière, les rayons issus des foyers situés sur  $\Phi_2$  forment une seconde série de surfaces développables  $\Omega_2$  dont les arêtes de rebroussement  $\alpha_2$  sont tracées sur  $\Phi_2$  et qui coupent  $\Phi_1$  suivant une série de courbes  $\beta_1$ . On a donc le théorème suivant :

*Tout système de rayons à foyers réels peut être considéré de deux manières différentes, comme appartenant à une série de surfaces développables telles, que le lieu géométrique de leurs arêtes de rebroussement est l'ensemble des deux surfaces focales.*

Toutes les génératrices de  $\Omega_1$  sont tangentes aux arêtes de rebroussement  $\alpha_1$ , les arêtes de rebroussement se trouvent toutes sur  $\Phi_1$ , donc les rayons du système sont tangents à  $\Phi_1$ . On verrait de même qu'ils sont tous tangents à  $\Phi_2$ . Donc

*Tous les rayons d'un système qui ont des foyers réels sont des tangentes communes aux deux surfaces focales.*

On peut aussi énoncer le théorème suivant comme conséquence du précédent :

*Tout système de rayons à foyers réels peut être considéré comme le système des tangentes communes aux deux surfaces focales, ou comme le système des tangentes doubles d'une surface.*

Pour déterminer complètement un système, on peut aussi ne se donner qu'une de ses surfaces focales  $\Phi_1$ , par exemple, pourvu que l'on se donne en même temps la série de courbes  $\alpha_1$  de cette surface; il en résulte que

*Tout système de rayons à surfaces focales réelles peut*

*être considéré comme le système des tangentes à une série de courbes tracées sur une surface.*

Comme tous les rayons situés sur une surface développable  $\Omega_1$  sont tangents à  $\Phi_2$ , la courbe  $\beta_1$  est la courbe de contact des deux surfaces. De même, toute surface développable  $\Omega_2$  est tangente à  $\Phi_1$  ou l'enveloppe suivant une certaine courbe. Donc

*Chacune des deux surfaces focales d'un système est enveloppée par une des séries de surfaces développables qui renferment tous les rayons du système.*

D'après un théorème connu, les génératrices rectilignes d'une surface développable qui enveloppe une autre surface suivant une certaine courbe, sont les tangentes conjuguées des tangentes à cette courbe. Donc

*Les deux séries de courbes déterminées par les deux séries de surfaces développables sur les surfaces focales d'un système se coupent sur chacune de ses surfaces suivant des directions conjuguées.*

Si les deux surfaces focales  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  se coupent, toute tangente à la courbe d'intersection est un des rayons du système, et par suite une tangente à l'une des courbes  $\alpha_1$ . La courbe d'intersection et  $\alpha_1$  ont donc une tangente commune, les points de contact coïncident; la courbe  $\alpha_1$  est donc tangente à la courbe d'intersection. Ceci est vrai, quelle que soit la tangente à la courbe d'intersection que l'on considère. Donc toutes les courbes de la série  $\alpha_1$  sont tangentes à la courbe d'intersection  $\Phi_1 \Phi_2$ . Il en est de même pour toutes les courbes de la série  $\alpha_2$ . Donc

*La courbe d'intersection des deux surfaces focales est la courbe enveloppe ou la courbe limite de toutes les arêtes de rebroussement situées sur les deux surfaces*

*focales et appartenant aux deux surfaces développables qui renferment tout le système de rayons.*

On obtient les équations des surfaces focales, comme on a obtenu plus haut celles des surfaces des points limites, au moyen des abscisses  $\rho_1$  et  $\rho_2$  des foyers; on a

$$x' = x + \rho_1 \xi, \quad y' = y + \rho_1 \eta, \quad z' = z + \rho_1 \zeta$$

et

$$x' = x + \rho_2 \xi, \quad y' = y + \rho_2 \eta, \quad z' = z + \rho_2 \zeta.$$

On obtient les deux séries de surfaces développables, les séries de courbes  $\alpha_1, \beta_1$  de  $\Phi_1$ ,  $\alpha_2, \beta_2$  de  $\Phi_2$  par l'intégration des équations différentielles

$$\frac{dv}{du} = \tau_1, \quad \frac{dv}{du} = \tau_2,$$

absolument comme cela se fait pour les surfaces  $O_1$  et  $O_2$  et les systèmes de courbures  $a_1$  et  $b_1$  de  $F_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$  de  $F_2$ .

Considérons enfin la surface lieu géométrique des centres d'un système de rayons. Nommons cette surface *surface centrale*. Cette surface est importante en ce sens qu'on peut considérer tous les rayons du système comme issus de ses points. Si l'on mesure les abscisses des points des rayons à partir de la surface centrale, on aura

$$r_1 = -r_2, \quad \rho_1 = -\rho_2, \quad g \mathcal{C} - (f + f') \mathcal{F} + e \mathcal{G} = 0$$

Ces équations permettent de faire des simplifications importantes.

On obtient les équations de la surface centrale au moyen de l'expression de l'abscisse des autres

$$m = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{g \mathcal{C} - (f + f') \mathcal{F} + e \mathcal{G}}{2 \Delta},$$

on a

$$x' = x + m \xi, \quad y' = y + m \eta, \quad z' = z + m \zeta.$$

Toutes ces surfaces, les surfaces des points limites, les surfaces focales et la surface centrale, qui sont intimement liées au système de rayons, peuvent dans certains cas particuliers se réduire à des courbes ou à des points. Certaines de ces surfaces peuvent aussi s'éloigner à l'infini, ou se réunir entre elles de manière à s'appliquer l'une sur l'autre. Le système des normales à une surface pour lequel les surfaces des points limites et les surfaces focales deviennent identiques peut être considéré comme appartenant à ces systèmes particuliers qui sont, pour ainsi dire, des systèmes limites. Le système de rayons pour lesquels  $\Delta = 0$  et par suite  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $E = 0$  et qui doit être exclu de l'étude générale, parce que les valeurs de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  sont indéterminées, mérite une mention spéciale. Pour ces systèmes particuliers, les surfaces des points limites et la surface centrale passent à l'infini, et, des deux surfaces focales, l'une passe à l'infini, tandis que l'autre reste déterminée et à distance finie. Des deux séries de surfaces développables qui renferment tous les rayons d'un tel système, l'une, celle dont les arêtes de rebroussement sont à l'infini, ne renferme que des surfaces cylindriques. Un pareil système peut être défini géométriquement de la manière suivante : le système de toutes les tangentes à une surface qui sont parallèles aux tangentes à une courbe donnée.

( *La suite prochainement.* )